详细解答

STEP II 2022，第 2 题

纯数学 · 递推关系

STEP II 2022，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

把关系式两边乘以 2，它就变成一个关于二阶差分（second differences）的陈述：$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$。在 (i) 中它等于零，所以一阶差分（first differences）是常数，数列（sequence）是线性的。在 (ii) 和 (iii) 中，二阶差分是一个给定的常数或一个给定的 n 的线性函数，所以技巧是减去一个恰好具有该二阶差分的多项式（polynomial），剩下的便是 (i) 中那类数列。

解答

第 (i) 部分

把关系式加倍并移项，对所有 $n \geq 1$ 得

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n.$$

所以每个差分都等于前一个差分，由归纳法（induction）可知每个差分都等于第一个差分 $d = u_2 - u_1$。这就是相邻两项之间的固定差。

把 $n - 1$ 个这样的差分加起来，

$$u_n = u_1 + (n-1)d = dn + (u_1 - d),$$

若 $d \neq 0$，这是 n 的 1 次多项式；若 $d = 0$，则是 0 次多项式（即常数）。无论哪种情况，次数（degree）都不超过 1。

第 (ii) 部分

设 $v_n = t_n + pn^2$。由于

$$\tfrac{1}{2}(p(n+2)^2 + pn^2) = p(n^2+2n+2) = p(n+1)^2 + p,$$

v_n 的关系式变成

$$t_{n+1} + p(n+1)^2 = \tfrac{1}{2}(t_{n+2} + t_n) + p(n+1)^2 + p - p,$$

即对所有 $n \geq 1$，有 $t_{n+1} = \frac{1}{2}(t_{n+2} + t_n)$。由第 (i) 部分，存在常数 A 和 B 使得 $t_n = A + Bn$，所以

$$v_n = pn^2 + Bn + A.$$

因为 $p \neq 0$，n^2 项不会消失，所以 v_n 的次数恰好是 2。

由 $v_1 = v_2 = 0$:

$$p + B + A = 0, \qquad 4p + 2B + A = 0.$$

两式相减得 $3p + B = 0$，所以 $B = -3p$，从而 $A = 2p$。因此

$$v_n = p(n^2 - 3n + 2) = p(n-1)(n-2).$$

第 (iii) 部分

这次题目没有提示代换，所以我们要自己找一个。把关系式加倍，

$$w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 2(an + b).$$

? **想一想** 哪一个 n 的多项式，其二阶差分是 n 的线性函数?

每取一次差分，多项式的次数就降一，所以我们需要一个三次多项式（cubic）。记 $\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$。直接展开得

$$\Delta^2 n^3 = (n^3 + 6n^2 + 12n + 8) - 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n^3 = 6n + 6,$$
$$\Delta^2 n^2 = (n^2 + 4n + 4) - 2(n^2 + 2n + 1) + n^2 = 2.$$

所以 $\Delta^2(cn^3 + en^2) = 6cn + 6c + 2e$，而当

$$c = \frac{a}{3}, \qquad e = b - 3c = b - a.$$

时，它对每个 n 都等于 $2an + 2b$。现在设 $w_n = t_n + \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2$。由于 Δ^2 是线性的，$\Delta^2 w_n = \Delta^2 t_n + 2(an + b)$，于是关系式变成 $\Delta^2 t_n = 0$，这正是第 (i) 部分的关系式。所以 $t_n = A + Bn$，且

$$w_n = \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2 + Bn + A.$$

因为 $a \neq 0$，三次项存在，所以 w_n 的次数是 3。

由 $w_1 = w_2 = 0$：

$$\frac{a}{3} + (b-a) + B + A = 0,$$
$$\frac{8a}{3} + 4(b-a) + 2B + A = 0.$$

第二式减去第一式得 $\frac{7a}{3} + 3(b-a) + B = 0$，所以 $B = \frac{2a}{3} - 3b$，再由第一式得 $A = 2b$。因此

$$w_n = \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2 + \left(\frac{2a}{3} - 3b\right)n + 2b.$$

由于 $w_1 = w_2 = 0$，因式 $n-1$ 和 $n-2$ 必定出现，再比较 n^3 项和常数项，便得到较简洁的形式

$$w_n = \frac{(n-1)(n-2)(an+3b)}{3}.$$

（展开 $(n-1)(n-2)(an+3b)$ 得 $an^3 + (3b-3a)n^2 + (2a-9b)n + 6b$，与上式一致。）

验算

- 在 (iii) 中设 $a = 0$、$b = p$ 应该得回 (ii)，结果的确如此：$(n-1)(n-2)\cdot 3p/3 = p(n-1)(n-2)$。
- 直接运行递推关系（recurrence）。取 $a = 3$、$b = 0$，有 $w_{n+2} = 2w_{n+1} - w_n + 6n$，所以由 $w_1 = w_2 = 0$ 得 $w_3 = 6$、$w_4 = 24$、$w_5 = 60$。公式给出 $(n-1)(n-2)n$，即 $6, 24, 60$。
- 次数为 3 的数列，其三阶差分是常数。对 $0, 0, 6, 24, 60$，差分是 $0, 6, 18, 36$，然后是 $6, 12, 18$，再然后是 $6, 6$：是常数，等于 $2a$。

常见错误

- 说 (i) 中的数列次数恰好是 1：若 $u_1 = u_2$，它是常数。
- 在 (iii) 中只尝试 $w_n = t_n + kn^3$。单靠 n^3 项会产生 $6kn + 6k$，所以还需要一个 n^2 项来调整常数。
- 忘记由 $p \neq 0$（或 $a \neq 0$）去证明“次数恰好是 2”（或 3）。

STEP 之外

这是解 $y'' = f(x)$ 的离散类比（discrete analogue）：通解（general solution）等于一个特解（particular solution）加上齐次方程（homogeneous equation）的解，而这里齐次方

程的解就是线性数列 $A + Bn$。同样的“余函数（complementary function）加特解”结构支配着线性微分方程（linear differential equations），而猜测多项式特解的方法几乎可以原封不动地搬过去。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）讲述了连续的版本。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。