详细解答

STEP II 2022，第 11 题

概率与统计 • 期望损失的最优化

STEP II 2022，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

按那 T 枝被测试的记忆棒的情况来划分事件。只要其中任何一枝受感染，就不会有任何东西放上网络，损失为零；只有当全部 T 枝都干净时，网络上的那场赌博才会出现。把期望损失（expected loss）写成 q 的函数，(ii) 就变成单变量的最大化（maximisation）问题；而比较相邻的 T 值（用差分（difference）而不是导数（derivative），因为 T 是整数）则可处理 (iii)。

解答

全文中，损失为 $-x$ 即表示获利 £x。设 L 为以英镑计的净损失。各记忆棒是否受感染互相独立（independent），每枝干净的概率（probability）为 q，所以任何指定的 m 枝记忆棒全部干净的概率是 q^m。由对称性（symmetry）可知，选哪 T 枝来测试并不重要。

第 (i) 部分

先考虑 $T > 0$。共有三种结果。

- 某枝被测试的记忆棒受感染（概率为 $1 - q^T$）：其余的全被销毁，没有任何记忆棒被使用，$L = 0$。
- 全部 T 枝被测试的记忆棒都干净，但其余 $N - T$ 枝中至少有一枝受感染（概率为 $q^T(1 - q^{N-T})$）：我们要支付消毒费用，所以 $L = D$。
- 全部 N 枝记忆棒都干净（概率为 $q^T q^{N-T} = q^N$）：被使用的 $N - T$ 枝每枝赚 £1，所以 $L = -(N - T)$。

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(L) &= D\,q^T\left(1-q^{N-T}\right)-(N-T)\,q^N\\ &= D\,q^T-(N-T+D)\,q^N.\end{aligned}$$

当 $T=0$ 时，全部 N 枝记忆棒都被使用：$L=D$ 的概率为 $1-q^N$，$L=-N$ 的概率为 q^N，得 $D-(N+D)q^N$。这正是同一公式取 $T=0$ 的结果，所以对每个 $0\le T<N$，

$$\mathrm{E}(L)=D\,q^T-(N-T+D)\,q^N.$$

第 (ii) 部分

α 的界。由于 $D>0$、$T\ge 0$ 及 $N-T>0$，分子和分母分别满足 $DT\ge 0$ 及 $N(N-T+D)>0$，所以 $\alpha\ge 0$。此外

$$N(N-T+D)-DT=N(N-T)+D(N-T)=(N-T)(N+D)>0,$$

所以 $DT<N(N-T+D)$，即 $\alpha<1$。

最大值。固定 N、D、T，对 $0\le q\le 1$ 记 $f(q)=Dq^T-(N-T+D)q^N$。

若 $T=0$，则 $\alpha=0$ 且 $f(q)=D-(N+D)q^N$，它随 q 递减，所以最大值出现在 $q=0$，即 $q^N=0=\alpha$ 之处。

若 $T\ge 1$，求导：

$$f'(q)=DTq^{T-1}-N(N-T+D)q^{N-1}=N(N-T+D)\,q^{T-1}\left(\alpha-q^{N-T}\right).$$

> **想一想** 我们怎样知道这个驻点（stationary point）是极大点，而且是整个区间上的最大值?

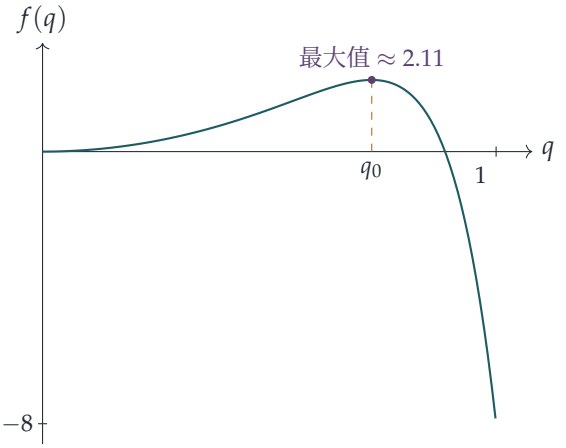
当 $0<q\le 1$ 时，因子 $N(N-T+D)q^{T-1}$ 是正数。因为 $N-T\ge 1$，q^{N-T} 由 0 严格递增（strictly increasing）至 1，而 $0<\alpha<1$，所以恰好有一个 $q_0\in(0,1)$ 使 $q_0^{N-T}=\alpha$。当 $q<q_0$ 时 $f'(q)>0$，当 $q>q_0$ 时 $f'(q)<0$。所以 f 在 q_0 之前上升，之后下降：它在 $[0,1]$ 上的最大值出现在 $q^{N-T}=\alpha$ 之处，得证。

最大值是多少。在 q_0 处有 $q_0^{N-T}=\alpha$，所以 $q_0=\alpha^{1/(N-T)}$ 及 $q_0^T=\alpha^{T/(N-T)}=\alpha^k$。于是

$$\begin{aligned}f(q_0)&=q_0^T\left(D-(N-T+D)\,q_0^{N-T}\right)=\alpha^k\left(D-(N-T+D)\cdot\frac{DT}{N(N-T+D)}\right)\\ &=\alpha^k\left(D-\frac{DT}{N}\right)=\frac{D(N-T)\,\alpha^k}{N}.\end{aligned}$$

所以最大的期望净损失是 $£\,D(N-T)\alpha^k/N$。（当 $T=0$ 时，这就是 $£D$；若取 $\alpha^0=1$，便与 $f(0)=D$ 吻合。）

下图显示 $N=10$、$T=2$、$D=5$ 时的 f，此时 $\alpha=\frac{1}{13}$。



第 (iii) 部分

现在固定 N、D 和 q，并记 $E_T = Dq^T - (N - T + D)q^N$。由于 T 只取整数值，“随 T 递增”的意思是对 $0 \leq T \leq N-2$ 有 $E_{T+1} > E_T$。相减得

$$\begin{aligned} E_{T+1} - E_T &= Dq^{T+1} - Dq^T + q^N \\ &= q^T\left(q^{N-T} - Dp\right), \end{aligned}$$

这里用了 $q - 1 = -p$。

> ? **想一想** 括号内的式子与 T 有关。怎样才能找到一个 β 同时适用于所有 T?

因为 $0 < q \leq 1$ 及 $N - T \leq N$，我们有 $q^{N-T} \geq q^N$，所以只须令 $q^N > Dp$ 便足够，而这个条件与 T 无关。由伯努利（Bernoulli）不等式（用简单的归纳法（induction）即可证明：若 $(1-p)^n \geq 1 - np$，则 $(1-p)^{n+1} \geq (1-np)(1-p) = 1 - (n+1)p + np^2$），

$$q^N = (1-p)^N \geq 1 - Np.$$

所以若 $1 - Np > Dp$，即 $p < \dfrac{1}{N+D}$，则 $q^{N-T} \geq q^N \geq 1 - Np > Dp$，而且 $q^T > 0$。因此，取

$$\beta = \frac{1}{N+D} > 0,$$

每个 $p < \beta$ 都使所有 T 均有 $E_{T+1} > E_T$，所以期望损失是 T 的递增函数。

对这样的 p，$E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}$ 中最小的是 E_0。所以当 p 足够小时，最佳策略是 $T = 0$：甚么都不测试，使用全部 N 枝记忆棒。这是合理的：如果感染很罕见，测试大多只会销毁本来可以赚钱的好记忆棒。

验算

- 取 $N = 1$、$T = 0$，公式给出 $D - (1 + D)q$：以概率 p 损失 D，以概率 q 获利 1，与预期相符。
- $q = 1$（完全没有感染）给出 $D - (N - T + D) = -(N - T)$，即必定获利 $N - T$。
- 取 $N = 10$、$T = 2$、$D = 5$：$\alpha = \frac{1}{13}$，$k = \frac{1}{4}$，最大值为 $4 \cdot 13^{-1/4} \approx 2.107$，与上图的峰值吻合。我们亦用电脑列出 $N \leq 7$ 时所有感染情况，验证了第 (i) 部分的公式。
- 取 $N = 10$、$D = 5$、$p = 0.3$（远大于 $\beta = \frac{1}{15}$），期望损失其实随 T 递减，由 $T = 0$ 时约 4.58 降至 $T = 9$ 时的 0.03：可见对 p 确实需要加上某种条件。

常见错误

- 遗漏“某枝被测试的记忆棒受感染”这个结果：它对期望值的贡献是 0，但仍然占去 $1 - q^T$ 的概率。
- 把获利算成 $£N$ 而不是 $£(N - T)$：即使被测试的记忆棒是干净的，它们也会被销毁。
- 在 (iii) 中不加说明就对整数 T 求导，或选取了与 T 有关的 β。

STEP 之外

这是统计决策理论（statistical decision theory）中的一个小问题：当某个参数（p）未知时，选择一个行动（这里是 T）以使期望损失最小。第 (ii) 部分体现了极小化极大（minimax）的思想：它为每个策略找出在所有可能的 p 之下的最坏情况，这正是谨慎的管理者可能会拿来比较的东西。测试成本与漏检缺陷成本之间的同一种取舍，也是验收抽样（acceptance sampling）和群组检测（group testing）背后的原理。Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率导论》）是建立本题所用期望值工具的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。