详细解答

STEP II 2022，第 10 题

力学 · 斜面上的抛体

> **STEP II 2022，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

第 (i) 部分是标准的轨迹方程（trajectory equation），窍门在于利用 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$，把它看成*关于 $\tan\alpha$ 的二次方程*（*quadratic*）。目标点能够被击中，当且仅当这个二次方程有实根，于是整道题便化为一个判别式（discriminant）条件。用水平坐标 (x, y) 写出来，这个条件原来描述的是一个圆盘（disc），而之后每一部分都只是读出一条直线与一个圆的相交位置。

解答

全题我们把抛射体（projectile）视为只受重力作用而自由运动的质点（particle），不计空气阻力（air resistance），并取 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。

第 (i) 部分

以发射点为基准量度水平距离和高度。在时间 t，

$$s = ut\cos\alpha, \qquad h = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

由水平运动得 $t = \dfrac{s}{u\cos\alpha}$，代入后得

$$h = s\tan\alpha - \frac{gs^2}{2u^2\cos^2\alpha},$$

即为所求。

第 (ii) 部分

设 $P = (x, y, y\tan\theta)$，并记 $s = \sqrt{x^2+y^2}$ 为它与大炮的水平距离。由于大炮可以指向任何方向，我们把它瞄准在经过 P 的铅垂平面内；运动便在该平面内进行，而由第 (i) 部分，我们需要一个角 α（可以是负数，因为大炮可以向下指），使得

$$y\tan\theta = s\tan\alpha - \frac{gs^2}{2u^2}(1+\tan^2\alpha).$$

若 $s = 0$，则 P 就是原点，垂直向上发射便可到达；而由于 $\sec^2\theta > \tan^2\theta$，下面的不等式在该点亦成立。对于 $s > 0$，设 $T = \tan\alpha$，它可以是任何实数。条件是

$$\frac{gs^2}{2u^2}T^2 - sT + \left(y\tan\theta + \frac{gs^2}{2u^2}\right) = 0$$

有实根 T，即它的判别式非负：

$$s^2 \geq 4\cdot\frac{gs^2}{2u^2}\left(y\tan\theta + \frac{gs^2}{2u^2}\right) \iff u^4 \geq 2gu^2 y\tan\theta + g^2s^2,$$

这是除以 $s^2 > 0$ 再乘以 u^4 的结果。除以 g^2 并利用 $s^2 = x^2+y^2$，

$$x^2 + y^2 + \frac{2u^2\tan\theta}{g}y \leq \frac{u^4}{g^2}.$$

对 y 配方（completing the square），并利用 $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$，

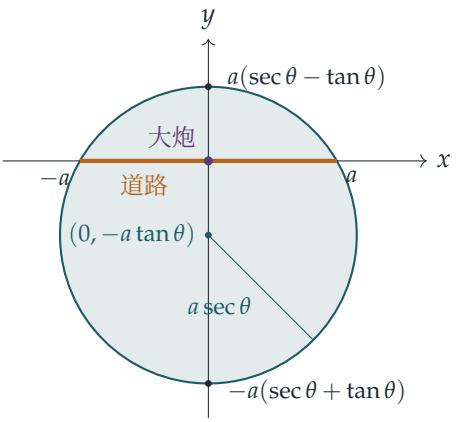
$$x^2 + \left(y + \frac{u^2\tan\theta}{g}\right)^2 \leq \frac{u^4}{g^2}(1+\tan^2\theta) = \frac{u^4\sec^2\theta}{g^2},$$

这正是所求的条件。

想一想 抛射体会不会在到达 P 之前就撞上斜坡地面?

不会。在发射所在的铅垂平面内，抛射体的高度减去地面的高度，是关于水平距离的二次式，首项系数为负（抛物线减去一条直线），而它在大炮处和 P 处均为零。所以它在两者之间为正：抛射体一直保持在地面之上，直至落在 P。

由此起记 $a = u^2/g$。可到达的点，就是其水平投影位于以 $(0, -a\tan\theta)$ 为圆心、$a\sec\theta$ 为半径的圆盘内的那些点。



上图（以 $\theta = 30^\circ$ 绘制）显示从上方俯视的可到达区域；“沿斜面向上”就是 y 的正方向。

第 (iii) 部分

沿斜面正上方即 $x = 0$、$y > 0$。条件变成 $(y + a\tan\theta)^2 \le a^2\sec^2\theta$, 而由于 $y + a\tan\theta > 0$, 这就是

$$y \le a(\sec\theta - \tan\theta).$$

斜面上水平坐标为 y 的点，沿斜面量度与原点的距离是 $y\sec\theta$。所以沿斜面向上最远的点，距离为

$$a\sec\theta(\sec\theta - \tan\theta) = a\,\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta} = a\,\frac{1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = \frac{u^2}{g(1+\sin\theta)},$$

即为所求。

沿斜面正下方即 $x = 0$、$y < 0$。此时条件给出 $y \ge -a(\sec\theta + \tan\theta)$，所以沿斜面向下最远的点与大炮的距离为

$$a\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta) = a\,\frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{u^2}{g(1-\sin\theta)}$$

第 (iv) 部分

道路是直线 $y = 0$（它位于斜面上，高度为 0）。在条件中代入 $y = 0$，得

$$x^2 \le a^2\sec^2\theta - a^2\tan^2\theta = a^2,$$

所以可到达的道路是 $-a \le x \le a$，长度为 $\dfrac{2u^2}{g}$，与在水平地面上相同。

现在把大炮放在 $(0, c, c\tan\theta)$。它与道路（即 x 轴）的距离是 $\sqrt{c^2 + c^2\tan^2\theta} = |c|\sec\theta$, 所以 $r = |c|\sec\theta$。第 (ii) 部分的一切只取决于相对于大炮的位置，而从斜面上任何一点

看，斜面都是一样的，因此我们可以沿用该条件，只需把 y 换成 $y-c$。道路（$y=0$）上可到达的部分满足

$$x^2 \le a^2\sec^2\theta - (a\tan\theta - c)^2.$$

想一想 大炮应该放在道路上方还是下方?

可到达的长度是 $2\sqrt{a^2\sec^2\theta-(a\tan\theta-c)^2}$，当被减去的平方项为零，即 $c = a\tan\theta > 0$ 时最大。所以大炮应放在道路上方的斜面上，距离恰好使道路穿过可到达圆盘的圆心，此时道路截出一条直径。最佳距离是

$$r = a\tan\theta\sec\theta = \frac{u^2\sin\theta}{g\cos^2\theta},$$

而道路的最大长度就是圆盘的直径，

$$2a\sec\theta = \frac{2u^2}{g\cos\theta}.$$

验算

- 取 $\theta = 0$（水平地面），第 (ii) 部分变成 $x^2+y^2 \le (u^2/g)^2$，即熟悉的各方向最大射程 u^2/g；(iii) 的两个答案都化为 u^2/g，而 (iv) 中 $r=0$，长度为 $2u^2/g$。
- 沿斜面向上的答案 $u^2/\big(g(1+\sin\theta)\big)$ 正是斜面（inclined plane）上向上发射的标准最大射程，这是圆盘正确的好迹象。
- 取 $u = 12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 及 $\theta = 0.5\,\mathrm{rad}$，用电脑扫描所有发射角，得出沿斜面向上的最大射程为 9.932 m，向下为 28.226 m，与 $u^2/\big(g(1\pm\sin\theta)\big)$ 吻合；移动大炮后的最佳道路长度为 $33.49\ \mathrm{m} = 2u^2/(g\cos\theta)$。

常见错误

- 把 (x,y) 当作沿斜面量度的距离。它们是水平坐标，所以沿斜面向上的距离是 $y\sec\theta$，而不是 y。
- 忘记大炮可以指向水平线以下：$\tan\alpha$ 可取所有实数，正因如此，判别式条件就是问题的全部。
- 把移动后的大炮放在道路下方。圆盘的圆心在大炮的斜坡下方，所以大炮必须位于道路上方。

STEP 之外

第 (ii) 部分的圆盘，是所有可能轨迹的包络（*envelope*）——“安全抛物面”（paraboloid of safety）$z = \dfrac{u^2}{2g} - \dfrac{g(x^2+y^2)}{2u^2}$——的一个截面；用任何平面与这个抛物面相交，都会得到一条圆锥曲线（conic），在这里其投影是一个圆。曲线族的包络，在大学一年级的力学和微分方程（differential equations）课程中都是很自然的课题。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）是一个好去处，可以看到以这种几何上的细致手法处理抛射体问题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。