详细解答

STEP II 2022，第 1 题

纯数学 · 分部积分法

STEP II 2022，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

每一部分都建基于同一招：分部积分（integration by parts）会产生第二个积分，而这个积分恰好抵消（或几乎抵消）你手上已有的某一项。在 (i) 和 (ii) 中，这意味着要看出被积函数（integrand）是某个乘积的导数（derivative）。在 (iii) 中，同一招显示两个积分之差只不过是 e^x/x 在上下限之间的变化，于是 (a) 的草图便能完成其余的工作。

解答

第 (i) 部分

对第一项进行分部积分，取 $u=\sqrt{1+x^3}$ 及 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=1$，于是 $v=x$ 及 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$：

$$\begin{aligned}\int 2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x &= 2x\sqrt{1+x^3}-2\int x\cdot\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x\\ &= 2x\sqrt{1+x^3}-\int\frac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

最后的积分正是被积函数的第二项，所以把它加上去便会将其抵消：

$$\int\left(2\sqrt{1+x^3}+\frac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}\right)\mathrm{d}x=2x\sqrt{1+x^3}+c.$$

用乘积法则（product rule）对 $2x\sqrt{1+x^3}$ 求导，会得回 $2\sqrt{1+x^3}+\dfrac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}$，由此印证结果。

第 (ii) 部分

把被积函数拆成 $\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{2\sin x}{x^3}$。两部分各自都没有初等原函数（elementary antiderivative）（第一部分就是著名的 Si 被积函数），所以它们必须合并处理，正如 (i) 一样。对第二部分进行分部积分，取 $u=\sin x$ 及 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=2x^{-3}$，于是 $v=-x^{-2}$：

$$\int \frac{2\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x=-\frac{\sin x}{x^2}+\int \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

接着对 $\dfrac{\cos x}{x^2}$ 进行分部积分，取 $u=\cos x$ 及 $v=-x^{-1}$：

$$\int \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos x}{x}-\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 与第一部分互相抵消，剩下

$$\int (x^2+2)\frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x=-\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}+c=-\frac{\sin x+x\cos x}{x^2}+c.$$

验证一下：对 $-\dfrac{\sin x}{x^2}$ 求导得 $-\dfrac{\cos x}{x^2}+\dfrac{2\sin x}{x^3}$，对 $-\dfrac{\cos x}{x}$ 求导得 $\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\cos x}{x^2}$；$\cos x/x^2$ 项互相抵消，总和正是被积函数。

第 (iii)(a) 部分

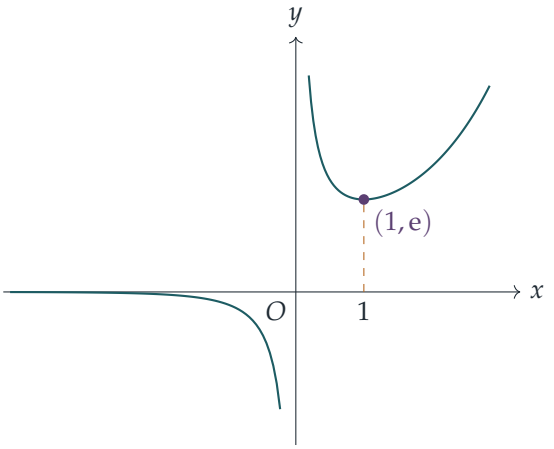
设 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，定义域为 $x\neq 0$。由商法则（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{x^2}=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}.$$

它只在 $x=1$ 时为零，所以唯一的驻点（stationary point）是 $(1,\mathrm{e})$。当 $x<1$（$x\neq 0$）时导数为负，当 $x>1$ 时导数为正，所以 $(1,\mathrm{e})$ 是极小点（minimum）。

图像其余的形状：

- 当 $x<0$ 时，$y<0$ 且 y 递减。当 $x\to-\infty$ 时，$y\to 0^-$（指数函数占上风），所以负 x 轴是一条渐近线（asymptote）。当 $x\to 0^-$ 时，$y\to-\infty$。
- 当 $x>0$ 时，$y>0$。当 $x\to 0^+$ 时，$y\to+\infty$；y 下降至 $x=1$ 处的极小值 e，然后增加至 $+\infty$，增长速度比任何多项式都快。
- y 轴是一条垂直渐近线，而曲线与两条坐标轴都不相交。



第 (iii)(b) 部分

对 $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ 进行分部积分，取 $u = \mathrm{e}^x$ 及 $v = -x^{-1}$：

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^x}{x} + \int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{所以} \qquad \int \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{x} + c.$$

（等价地，$\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$ 正是我们在 (a) 中求得的导数。）

想一想 在 a 与 $2a$ 之间积分，究竟是否合理?

两个被积函数在 $x = 0$ 处都趋向无穷，而在 0 附近 e^x/x^2 的积分发散，所以积分区间必须避开 0。这要求 $a \neq 0$；这样 a 与 $2a$ 同号，0 永远不会在两者之间，积分便是有限的。

两个积分相等，当且仅当它们的差为零：

$$\left[\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right]_a^{2a} = \frac{\mathrm{e}^{2a}}{2a} - \frac{\mathrm{e}^a}{a} = \frac{\mathrm{e}^a}{2a}(\mathrm{e}^a - 2) = 0.$$

由于 $\mathrm{e}^a/(2a) \neq 0$，我们需要 $\mathrm{e}^a = 2$，所以

$$a = \ln 2.$$

第 (iii)(c) 部分

与 (b) 完全一样，对于整数 $m \neq n$，两个积分要是有限的，0 就不能落在 m 与 n 之间的闭区间内，所以 m 和 n 均非零且同号。它们的差是

$$\int_m^n \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_m^n \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^n}{n} - \frac{\mathrm{e}^m}{m},$$

所以我们需要两个同号的相异整数，使 $f(x) = \mathrm{e}^x/x$ 在该两处取相同的值。换句话说，一条水平线必须在两个整数 x 值处与 (a) 的图像相交。

想一想 $x > 0$ 部分的曲线并非一一对应（one-to-one），因为它先下降再回升。那么，为何两个正整数不能给出相同的高度？

因为转向点（turning point）位于 $x = 1$，而 1 本身就是最小的正整数。逐一考虑各情况：

- *两者皆负*。由 (a) 可知，f 在 $x < 0$ 上严格递减（strictly decreasing），所以 $m \neq n$ 推出 $f(m) \neq f(n)$。
- *两者皆正*。这时 $m, n \geq 1$，而当 $x > 1$ 时 $f'(x) > 0$，所以 f 在 $[1, \infty)$ 上严格递增。同样地，$m \neq n$ 推出 $f(m) \neq f(n)$。

一条水平线可以与正数分支相交两次，但这时两个交点之一必定位于 $0 < x < 1$，而该范围内没有整数。所以没有任何一对相异整数符合要求，因此这是不可能的，得证。

验算

- 对于 (i)，在 $x = 1$ 处原函数的值为 $2\sqrt{2}$，而积分在 $[0, 1]$ 上的数值为 2.8284…，两者吻合。
- 对于 (ii)，积分在 $[1, 10]$ 上的数值为 1.4711…，与 $-(\sin x + x \cos x)/x^2$ 的变化相同。
- 对于 (iii)(b)，取 $a = \ln 2$ 时两个积分都约为 1.9224。另请注意 $f(\ln 2) = 2/\ln 2 = f(2 \ln 2)$：两个积分限位于极小点两侧的同一高度，正如草图所示必然如此。
- 对于 (iii)(c)，任何两个整数最接近的情况是 $f(1) = \mathrm{e} \approx 2.718$ 对 $f(2) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 \approx 3.695$。

常见错误

- 在 (b) 和 (c) 中，忘记包含 0 的区间会令积分失去意义，因而看不出为何 m 和 n 必须同号。
- 在 (c) 中，不加限制地断言“f 是一一对应的”：事实并非如此（例如 $f(\ln 2) = f(2 \ln 2)$）。论证需要用到位于 $x = 1$ 的转向点。

STEP 之外

第 (i) 和 (ii) 部分是这样的例子：被积函数的两部分各自都没有初等原函数，但它们的和却有。微分代数（differential algebra）中的刘维尔定理（Liouville's theorem）精确刻画了哪些函数具有初等原函数；e^x/x、$\sin x/x$ 和 $\sqrt{1 + x^3}$ 都没有，这正是抵消之所以关键的原因。第 (iii)(c) 部分是一个单射性（injectivity）论证，而分析课程会把这类关于单调

性（monotonicity）和中值定理（mean value theorem）的推理严格化；可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。