详细解答

STEP III 2021，第 9 题

力学 · 斜碰撞与恢复系数

STEP III 2021，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

关键思路

几何部分是在两个角落三角形 CPQ 和 BRP 中各用一次正弦定理（sine rule）；把两式相乘时，QR 离 CB 的共同高度会互相抵消。至于反弹，光滑（smooth）的墙会保留沿墙方向的速度分量，并把垂直于墙的分量乘以 e，因此路径在反弹前后与墙所成的角满足 $\tan(\text{反弹后}) = e\tan(\text{反弹前})$。每次反弹各给出第一个结果中的一个括号。

解答

几何恒等式

设 h 为直线 QR 与 BC 的距离。由于 $QR \parallel CB$，三角形 AQR 是等边三角形，所以 $CQ = BR = h/\sin 60^\circ = 2h/\sqrt{3}$。

在三角形 CPQ 中，C 处的角是 60°，P 处的角是 θ，所以 Q 处的角是 $120^\circ - \theta$。由正弦定理得

$$\frac{CP}{\sin(120^\circ - \theta)} = \frac{CQ}{\sin\theta} \quad \Longrightarrow \quad (a-x)\sin\theta = \frac{2h}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \tfrac{1}{2}\sin\theta\right).$$

两边除以 $\sin\theta$（因 $0 < \theta < 180^\circ$，故非零）并整理，得

$$\sqrt{3}\cot\theta + 1 = \frac{\sqrt{3}\,(a-x)}{h}.$$

在三角形 BRP 中，B 处的角是 60°，R 处的角是 ϕ，P 处的角是 $120^\circ - \phi$。由正弦定理得

$$\frac{BP}{\sin\phi} = \frac{BR}{\sin(120^\circ - \phi)} \quad \Longrightarrow \quad x\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi + \tfrac{1}{2}\sin\phi\right) = \frac{2h}{\sqrt{3}}\sin\phi,$$

因此

$$\sqrt{3}\cot\phi + 1 = \frac{4h}{\sqrt{3}\,x}.$$

把两个结果相乘，h 和 $\sqrt{3}$ 都抵消掉：

$$(\sqrt{3}\cot\phi + 1)(\sqrt{3}\cot\theta + 1) = \frac{4(a-x)}{x},$$

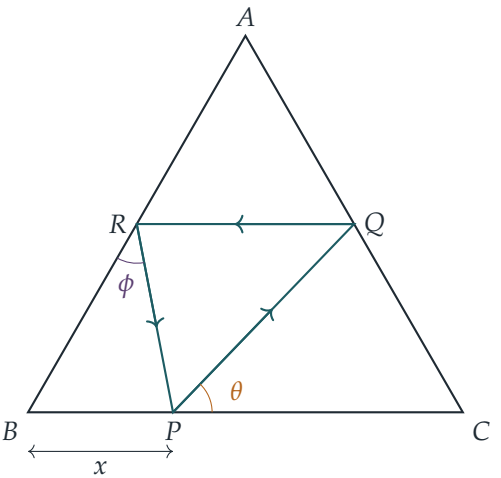
两边乘以 x 即得所求的恒等式。

反弹

把球视为在光滑桌面上运动的质点，因此它在两次碰撞之间沿直线行进；框架亦是光滑的，所以每次碰撞只产生垂直于墙的冲量（impulse）。设球以速率 u、与墙成角 α 撞向墙，并以速率 v、与墙成角 β 离开。沿墙的分量不变，垂直于墙的分量则反向并乘以 e：

$$v\cos\beta = u\cos\alpha, \qquad v\sin\beta = eu\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad \tan\beta = e\tan\alpha.$$

球沿墙的运动方向亦保持不变，所以从该方向量度时，α 和 β 都是锐角。（我们需要 $e > 0$，否则第一次碰撞后球便会沿着墙滑行。）



在 Q 点。球沿 PQ 到达，与墙 CA 成角 $\angle PQC = 120^\circ - \theta$，朝 A 方向移动。它沿 QR 离开，与墙成角 $\angle AQR = 60^\circ$（因 $QR \parallel CB$，两者为同位角（corresponding angles））。所以

$$\tan 60^\circ = e\tan(120^\circ - \theta).$$

利用差角公式及 $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$，再把分子分母同乘以 $\cot\theta$，得

$$\tan(120^\circ - \theta) = \frac{-\sqrt{3} - \tan\theta}{1 - \sqrt{3}\tan\theta} = \frac{\sqrt{3}\cot\theta + 1}{\sqrt{3} - \cot\theta}.$$

记 $c=\sqrt{3}\cot\theta$。反弹条件 $\sqrt{3}(\sqrt{3}-\cot\theta)=e(\sqrt{3}\cot\theta+1)$ 变成 $3-c=e(c+1)$，即 $4-(c+1)=e(c+1)$，所以

$$\sqrt{3}\cot\theta+1=\frac{4}{1+e}.$$

在 R 点。球沿 QR 到达，与墙 AB 成角 $\angle ARQ=60^\circ$，朝 B 方向移动，然后沿 RP 离开，所成角为 $\angle BRP=\phi$。所以

$$\tan\phi=e\tan 60^\circ=\sqrt{3}e,\qquad \text{所以}\qquad \sqrt{3}\cot\phi=\frac{1}{e},\qquad \sqrt{3}\cot\phi+1=\frac{1+e}{e}.$$

求 x。把两个括号代入恒等式，

$$\frac{1+e}{e}\cdot\frac{4}{1+e}\cdot x=4(a-x)\quad\Longrightarrow\quad x=e(a-x)\quad\Longrightarrow\quad x=\frac{ae}{1+e},$$

正如所求。

再绕一圈

想一想 在 P 点必须发生甚么，球才会再一次沿 PQ 出发?

球沿 RP 到达 P。在三角形 BRP 中，这条路径与 BC 成角 $\angle RPB=120^\circ-\phi$，所以只有当这个角是锐角时，球到达时才是朝 C 方向移动。要重走 PQ，球必须以与 PC 成角 θ 离开，因此我们需要

$$\tan\theta=e\tan(120^\circ-\phi).$$

由在 Q 点的计算，$\sqrt{3}\cot\theta=\frac{4}{1+e}-1=\frac{3-e}{1+e}$，所以 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}(1+e)}{3-e}$，此值为正：$PQ$ 确实是朝 C 那一侧前进。

把在 Q 点用过的同一公式中的 θ 换成 ϕ，并用 $\sqrt{3}\cot\phi=\frac{1}{e}$，得

$$\tan(120^\circ-\phi)=\frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}\cot\phi+1)}{3-\sqrt{3}\cot\phi}=\frac{\sqrt{3}\,(1+e)/e}{(3e-1)/e}=\frac{\sqrt{3}(1+e)}{3e-1}.$$

若 $e\le\frac{1}{3}$，则 $120^\circ-\phi\ge 90^\circ$，所以碰撞后球会垂直离开 BC，或折返朝 B 方向移动。这样它便不可能沿着向 C 倾斜的 PQ 前进。所以 $e>\frac{1}{3}$，而条件变为

$$\frac{\sqrt{3}(1+e)}{3-e}=\frac{\sqrt{3}\,e(1+e)}{3e-1}\quad\Longleftrightarrow\quad 3e-1=3e-e^2\quad\Longleftrightarrow\quad e^2=1.$$

由于 $e>0$，得 $e=1$，正如所求。球的速率在每次碰撞时都会改变（除非 $e=1$），但速率在这里毫不相干：重要的只是方向。

验算

- 当 $e = 1$：$x = \frac{a}{2}$ 且 $\tan\theta = \tan\phi = \sqrt{3}$，所以 $\theta = \phi = 60°$，而 PQR 是连接各边中点的三角形。由对称性，这是一条闭合的完全弹性轨道，与预期相符。
- 取 $a = 1$、$e = \frac{1}{2}$：$x = \frac{1}{3}$ 且 $\theta \approx 46.10°$。用电脑逐步模拟球经过三次碰撞，它会准确地回到 P。下一次碰撞后，它以与 BC 约成 $68.95°$ 的角离开，而不是 $46.10°$，所以不会再绕 PQR 一圈。
- 当 $e \to 0$，$x \to 0$：P 滑向角落 B。这与球在每道墙上几乎失去全部垂直于墙的速度相吻合。

常见错误

- 把 e 乘到整个速度上，或乘到沿墙的分量上。只有垂直于光滑墙的分量会改变。
- 从法线量度入射角，却使用 $\tan\beta = e\tan\alpha$；这条式只适用于从墙量度的角。若从法线量度，定律应为 $\cot\beta = e\cot\alpha$。
- 在最后一部分，忘记 $120° - \phi$ 可能是钝角，或忘记必须舍去 $e = -1$。

STEP 之外

球在一个区域内反弹的路径，是数学撞球（mathematical billiards）的研究对象。当 $e = 1$ 时，连接各边中点的三角形就是法尼亚诺（Fagnano）轨道。在任何锐角三角形中，这条轨道连接三条高的垂足，而且它是周长最短的内接三角形（inscribed triangle）。当 $e < 1$ 时，每次反弹都会使路径向墙压平；正如我们在这里发现的，球无法重复一条闭合路线。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对冲量和碰撞有仔细的讨论。至于撞球问题本身，Tabachnikov 的 *Geometry and Billiards*（《几何与撞球》）是很好的下一步。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。