详细解答

STEP III 2021，第 8 题

纯数学 · 递推关系与极限

STEP III 2021，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 2.8 节平方再减二中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/squaring-minus-two.html

关键思路

一切都建基于把递推关系（recurrence）因式分解（factorise）。两边减去 2，得 $x_{n+1}-2=(x_n-2)(x_n+2)$，所以一旦各项都大于 2，它们与 2 的距离在每一步都会被乘以一个大于 4 的数。由此得到第 (i) 部分，第 (ii) 部分亦随之而来。至于第 (iii) 部分，从 x_{n+1}^2 减去 4 同样可以漂亮地因式分解，而正正是这一点令乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 可以逐项相消（telescope）。

解答

第 (i) 部分

我们对 n 使用数学归纳法（induction）。当 $n=1$ 时，命题变成 $x_1\geq 2+4^0(a-2)=a$，这是成立的，而且取等号（注意 $4^0=1$）。

假设对某个 $n\geq 1$ 有 $x_n\geq 2+4^{n-1}(a-2)$。由于 $a>2$，右方大于 2，所以 $x_n>2$。于是

$$x_{n+1}-2=x_n^2-4=(x_n-2)(x_n+2).$$

这里 $x_n-2>0$ 而且 $x_n+2>4$，所以 $(x_n-2)(x_n+2)\geq 4(x_n-2)$。利用归纳假设（inductive hypothesis）$x_n-2\geq 4^{n-1}(a-2)$，

$$x_{n+1}-2\geq 4(x_n-2)\geq 4\cdot 4^{n-1}(a-2)=4^n(a-2),$$

这正是 $n+1$ 时的命题。由归纳法，对所有 $n\geq 1$ 都有 $x_n\geq 2+4^{n-1}(a-2)$。

我们从来没有把不等式平方。把 $x_n \geq$ (界) 两边平方，只有在两边都非负时才成立，而因式分解的形式完全避开了这个顾虑。

第 (ii) 部分

若 $|a| > 2$。此时 $x_2 = a^2 - 2 > 4 - 2 = 2$。数列（sequence）$x_2, x_3, \ldots$ 服从同一个递推关系，而且首项大于 2，所以以 x_2 代替 a（把下标平移一位）应用第 (i) 部分，得

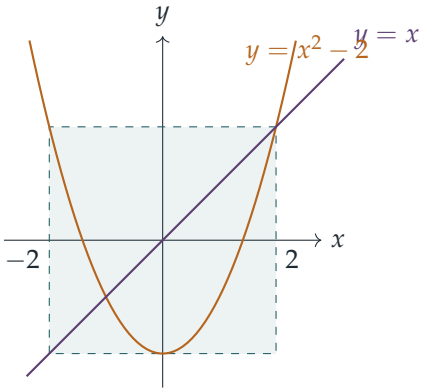
$$x_n \geq 2 + 4^{n-2}(x_2 - 2) \qquad (n \geq 2).$$

由于 $x_2 - 2 > 0$ 而且 $4^{n-2} \to \infty$，得 $x_n \to \infty$。

若 $|a| \leq 2$。我们用归纳法证明对每个 n 都有 $-2 \leq x_n \leq 2$。这在 $n = 1$ 时成立。若 $-2 \leq x_n \leq 2$，则 $0 \leq x_n^2 \leq 4$，所以 $-2 \leq x_n^2 - 2 \leq 2$，即 $-2 \leq x_{n+1} \leq 2$。因此这个数列有界（bounded），不可能趋向无限大。

> **想一想** 在 $|a| \leq 2$ 的情况下，只证明对所有 n 都有 $x_n \leq 2$ 足够吗?

不足够。单有上界并不够，因为若某一项小于 -2，它的平方便会大于 4，于是下一项就会大于 2。这就是为甚么归纳过程必须同时带着两个界。图像说明了为何这样可行：抛物线（parabola）$y = x^2 - 2$ 把区间 $[-2, 2]$ 映射到它自身上。



综合两种情况，$x_n \to \infty$ 当且仅当 $|a| > 2$。

第 (iii) 部分

推动这部分一切的因式分解是

$$x_{n+1}^2 - 4 = (x_n^2 - 2)^2 - 4 = x_n^4 - 4x_n^2 = x_n^2\,(x_n^2 - 4).$$

由于 $a > 2$，第 (i) 部分给出对所有 n 都有 $x_n > 2$，所以 $x_n > 0$ 而且 $x_n^2 - 4 > 0$。取正平方根，

$$\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = x_n \sqrt{x_n^2 - 4}.$$

重复应用这个关系（严格来说，是对 n 用归纳法），

$$\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = x_n \sqrt{x_n^2 - 4} = x_n x_{n-1} \sqrt{x_{n-1}^2 - 4} = \cdots = x_1 x_2 \cdots x_n \sqrt{a^2 - 4}.$$

因此，对每个 $n \geq 1$，

$$\frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \frac{\sqrt{a^2 - 4}\, x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}},$$

与 y_n 的定义比较，可见所求的公式对所有 n 成立，当且仅当 $A = \sqrt{a^2 - 4}$。

求 a。 $A = \sqrt{a^2 - 4}$ 这个值是必然的。在 $n = 1$ 时，所求的公式变成 $Aa/x_2 = a\sqrt{a^2 - 4}/x_2$，由于 $a > 0$ 而且 $x_2 > 0$，得 $A = \sqrt{a^2 - 4}$。反过来，在 $a > 2$ 之下 $A = \sqrt{a^2 - 4}$ 表示 $A^2 = a^2 - 4$，所以

$$a = \sqrt{A^2 + 4}.$$

这个值确实满足 $a > 2$，因为 $A > 0$ 给出 $A^2 + 4 > 4$。取这个 a，便有 $\sqrt{a^2 - 4} = A$，而上面列出的恒等式（identity）就变成对所有 $n \geq 1$ 都有 $y_n = \sqrt{x_{n+1}^2 - 4} \,/\, x_{n+1}$，正如所求。

收敛性。 取这个 a 值，由于 $x_{n+1} > 0$，

$$y_n = \frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \sqrt{1 - \frac{4}{x_{n+1}^2}}.$$

由于 $a > 2$，第 (ii) 部分给出 $x_{n+1} \to \infty$，所以 $4/x_{n+1}^2 \to 0$，因而 $y_n \to 1$。第二个数列收敛（converges），其极限（limit）是 1。

验算

- 取 $A = 1$，则 $a = \sqrt{5} \approx 2.236$。于是 $x_2 = 3$、$x_3 = 7$，而且 $y_1 = \sqrt{5}/3 \approx 0.745$。由公式得 $\sqrt{9 - 4}/3 = \sqrt{5}/3$，两者吻合。接着，$y_2 = \sqrt{5} \cdot 3/7 \approx 0.958$，而 $\sqrt{49 - 4}/7 = 3\sqrt{5}/7$，同样吻合。$y_3 \approx 0.99909$ 和 $y_4 \approx 0.9999996$ 这两项正飞快地趋向 1。
- 以 $t > 1$ 作代换 $a = t + 1/t$，可得 $x_n = t^{2^{n-1}} + t^{-2^{n-1}}$。这显示了增长实际上有多快（双重指数（doubly exponential）增长，远快于第 (i) 部分的 4^{n-1}），而且与上面每个结果都一致。
- 第 (i) 部分的界和第 (ii) 部分的有界性，亦已用电脑以大量随机起始值测试过。

常见错误

- 未先检查两边是否非负，就把归纳假设中的不等式平方。
- 在第 (ii) 部分，当 $|a| \leq 2$ 时只证明 $x_n \leq 2$。你还需要 $x_n \geq -2$，否则下一项可能跳到 2 以上。
- 倒推求出 a，却从未确认这个值对所有 n 都适用，并且满足 $a > 2$。

STEP 之外

映射（map）$x \mapsto x^2 - 2$ 是二次映射族（quadratic family）$x \mapsto x^2 + c$ 中最著名的成员。在 $[-2, 2]$ 上，代入 $x = 2\cos\theta$ 会把它变成倍角映射 $\theta \mapsto 2\theta$，这是混沌动力学（chaotic dynamics）的标准入门例子。在这个区间以外，每条轨道（orbit）都会逃逸到无限大。当 $a > 2$ 时，同样的想法可用 $x = 2\cosh u$ 实现，而第 (iii) 部分的乘积就是经典的 $\prod \cos(\theta/2^k)$ 逐项相消的双曲（hyperbolic）版本。想了解这里的极限和归纳法背后的分析学，可阅读 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。