详细解答

STEP III 2021，第 7 题

纯数学 · 几何中的复数

STEP III 2021，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

关键思路

把单位圆（unit circle）上的两点相加或相减，即 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 时，先抽出“平均”因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}$。剩下的部分就是纯粹的余弦或纯粹的正弦，第 (i) 部分正是靠这一点得以成立。第 (i) 部分的结论是 $(a+b)/(a-b)$ 为纯虚数（purely imaginary），而在复平面（complex plane）上，“比值为纯虚数”就代表“互相垂直（perpendicular）”。之后的一切，不过是对 a、b、c、d 的各种和作整理而已。

解答

第 (i) 部分

设 $\alpha = \frac{1}{2}(\theta+\phi)$ 及 $\beta = \frac{1}{2}(\theta-\phi)$，于是 $\theta = \alpha+\beta$ 而 $\phi = \alpha-\beta$。那么

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\right) = 2\cos\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha},$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\right) = 2\mathrm{i}\sin\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.$$

条件 $\theta-\phi \neq 2n\pi$ 正好表示 β 不是 π 的倍数，因此 $\sin\beta \neq 0$，分母不为零。两式相除，得

$$z = \frac{2\cos\beta}{2\mathrm{i}\sin\beta} = -\mathrm{i}\cot\beta = -\mathrm{i}\cot\left(\tfrac{1}{2}(\theta-\phi)\right) = \mathrm{i}\cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right),$$

这里用到 $1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}$，以及 cot 是奇函数（odd function）这一事实。这就是所求的结果。

由于 $\cot(\frac{1}{2}(\phi-\theta))$ 是实数，z 位于虚轴上：

$$|z| = \left|\cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right)\right|, \qquad \arg z = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{若 } \cot(\frac{1}{2}(\phi-\theta)) > 0, \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{若 } \cot(\frac{1}{2}(\phi-\theta)) < 0. \end{cases}$$

若 $\cot(\frac{1}{2}(\phi-\theta))=0$，即 $\phi-\theta$ 是 π 的奇数倍，则 $z=0$，其辐角（argument）没有定义。（这种情况出现在两点位于直径两端时，此时两者之和为零。）

第 (ii) 部分

由于 A 和 B 都在以原点为圆心的单位圆上，可记 $a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 及 $b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$。两点相异，所以 $\theta-\phi$ 不是 2π 的倍数，第 (i) 部分适用：

$$\frac{x}{a-b}=\frac{a+b}{a-b}=\mathrm{i}k,\qquad k=\cot\Big(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\Big)\in\mathbb{R}.$$

因为 $x=a+b\neq 0$,所以 $k\neq 0$。于是 $x=\mathrm{i}k\,(a-b)$：向量 $\overrightarrow{OX}$（由 x 表示）就是把向量 $\overrightarrow{BA}$（由 $a-b$ 表示）旋转一个直角，再乘以非零实数 k 所得。等价地说，$\arg x-\arg(a-b)=\pm\frac{1}{2}\pi$。因此 OX 垂直于 AB。

> **想一想** 为甚么需要 $a+b\neq 0$?

若 $a+b=0$，则 X 就是原点本身。这时根本没有直线 OX，也就谈不上垂直。在代数上，这对应于 $k=0$ 的情况，此时 x 的辐角没有定义。

第 (iii) 部分

设 $h=a+b+c$，则

$$h-a=b+c.$$

复数 $h-a$ 表示向量 $\overrightarrow{AH}$。分两种情况。

- 若 $b+c=0$，则 $h-a=0$，故 $h=a$。
- 若 $b+c\neq 0$，则对单位圆上的相异两点 B 和 C 应用第 (ii) 部分，可知由 $b+c$ 表示的向量垂直于 BC。这个向量正是 $\overrightarrow{AH}$，所以 AH 垂直于 BC。（此时 $H\neq A$，故 AH 确实是一条直线。）

所以 $h=a$ 或 $AH\perp BC$，即为所求。由对称性，BH 与 CA、CH 与 AB 亦有同样结论，所以 H 确实位于三条高（altitude）上。$h=a$ 的情况就是 BC 为直径的时候：三角形在 A 处是直角，其垂心（orthocentre）就是顶点 A。

第 (iv) 部分

根据垂心的定义，

$$p=a+b+c,\qquad q=b+c+d,\qquad r=c+d+a,\qquad s=d+a+b.$$

AQ 的中点是

$$\tfrac{1}{2}(a+q)=\tfrac{1}{2}(a+b+c+d).$$

这个式子对 a,b,c,d 是对称的，所以它同时也是 BR、CS 及 DP 的中点：

$$\tfrac{1}{2}(b+r)=\tfrac{1}{2}(c+s)=\tfrac{1}{2}(d+p)=\tfrac{1}{2}(a+b+c+d).$$

设 M 为由 $m=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ 表示的点。那么

$$q=2m-a,\qquad r=2m-b,\qquad s=2m-c,\qquad p=2m-d.$$

所以单一个映射

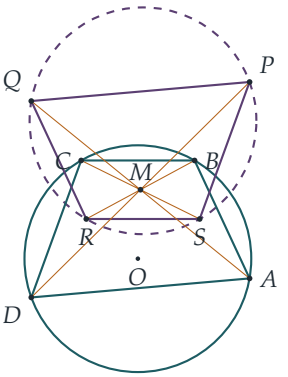
$$T:\ w\longmapsto 2m-w$$

把 $A\mapsto Q$、$B\mapsto R$、$C\mapsto S$ 及 $D\mapsto P$。因此它把四边形 $ABCD$ 逐个顶点地映射到 $QRSP$。

要描述 T，可把它写成 $T(w)-m=-(w-m)$。相对于 M 的位移被反向，也就是以 M 为中心乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$。所以

T 是绕复数为 $\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ 的点 M 旋转（*rotation*）180°（即半周旋转）。

等价地说，T 是关于点 M 的点反射（point reflection）。特别地，$QRSP$ 与 $ABCD$ 全等（congruent），而且由于旋转保持定向，Q,R,S,P 同样按逆时针方向排列。四个垂心都位于以复数 $a+b+c+d$ 所表示的点为圆心的单位圆上，这个圆就是经过 A,B,C,D 的圆的像。



验算

- 第 (i) 部分：取 $\theta=0$、$\phi=\frac{1}{2}\pi$，得 $z=(1+\mathrm{i})/(1-\mathrm{i})=\mathrm{i}$，而 $\mathrm{i}\cot\frac{1}{4}\pi=\mathrm{i}$。所以 $|z|=1$ 且 $\arg z=\frac{1}{2}\pi$。
- 第 (iv) 部分：取 $a=1$、$b=\mathrm{i}$、$c=-1$、$d=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}$。则 $m=0.3+0.1\mathrm{i}$，而 $q=b+c+d=-0.4+0.2\mathrm{i}$，正如所言等于 $2m-a$。对于正方形 $(a,b,c,d=1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i})$，得 $m=0$，而 Q,R,S,P 恰好就是 C,D,A,B：半周旋转的中心是 O。
- 四个部分亦已用电脑在圆上数以千计的随机点上验证过。

常见错误

- 只答 $\arg z = \frac{1}{2}\pi$。余切的正负号决定答案是 $\pm\frac{1}{2}\pi$ 中的哪一个，而 $z = 0$ 则没有辐角。
- 在第 (iv) 部分把顶点的对应次序弄错。A 对应的是 Q，不是 P：与每个顶点相对的垂心，是*不包含*该顶点的那个三角形的垂心。
- 把映射描述为“一个旋转”却没有说明中心和角度，或描述为“比例因子为 -1 的放大（enlargement）”却没有说明中心。两种描述都可以，但都必须包含齐两项资料。

STEP 之外

简洁的公式 $h = a + b + c$（外心（circumcentre）位于原点时）是一整套复数几何手法的起点。例如，形心（centroid）是 $\frac{1}{3}(a + b + c)$，所以 O、形心与 H 共线，这条直线就是欧拉线（Euler line）。第 (iv) 部分是同一故事在圆内接四边形（cyclic quadrilateral）上的一个小片段。Tristan Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）全书都把复数乘法看作旋转与缩放，是极佳的下一步读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。