详细解答

STEP III 2021，第 6 题

纯数学 · 反函数与导数

STEP III 2021，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

关键思路

两个函数看起来都令人望而生畏，但它们的导数（derivative）原来都非常简单。导数为 $\frac{1}{1+x^2}$ 的函数必定是 $\tan^{-1} x$ 加上一个常数，而导数为零的函数是常数，但只是在它有定义的每一个区间（interval）上各自成立。所以真正的工作是利用一个方便的数值或一个极限，求出每一段上各自的常数，并留意函数在无定义之点的跳跃。

解答

第 (i) 部分

设 $t = \tan\alpha$，则 $t > 0$；再设 $u = \dfrac{xt+1}{t-x}$，于是 $f_\alpha(x) = \tan^{-1} u$。由商法则（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{t(t-x)+(xt+1)}{(t-x)^2} = \frac{1+t^2}{(t-x)^2},$$

而且

$$1+u^2 = \frac{(t-x)^2+(xt+1)^2}{(t-x)^2} = \frac{t^2+x^2+x^2t^2+1}{(t-x)^2} = \frac{(1+t^2)(1+x^2)}{(t-x)^2}.$$

所以由链式法则（chain rule），

$$f'_\alpha(x) = \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2},$$

即所求。

? **想一想** 这是否表示 $f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + c$，其中 c 是单一个常数?

不是。函数在 $x = \tan\alpha$ 处无定义，所以定义域（domain）是两个分开的区间；在每一个区间上，$f_\alpha(x) - \tan^{-1} x$ 的导数为零，因此是常数，但两个常数不一定相同。

当 $x < \tan\alpha$ 时：在 $x = 0$ 处，我们有 $f_\alpha(0) = \tan^{-1}(\cot\alpha) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$，因为 $0 < \frac{1}{2}\pi - \alpha < \frac{1}{2}\pi$。因此

$$f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \qquad (x < \tan\alpha).$$

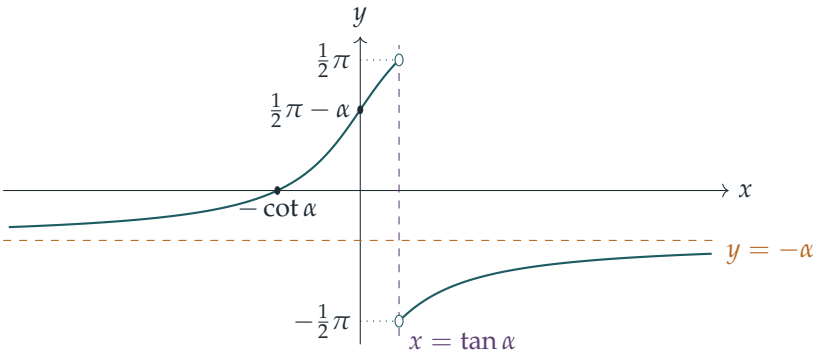
当 $x > \tan\alpha$ 时：当 $x \to \tan\alpha$ 而 x 从上方趋近时，分子 $xt + 1$ 趋于 $1 + t^2 > 0$，而分母 $t - x$ 经负值趋于 0，所以 $u \to -\infty$，且 $f_\alpha(x) \to -\frac{1}{2}\pi$。由于 $\tan^{-1} x \to \alpha$，常数是 $-\frac{1}{2}\pi - \alpha$：

$$f_\alpha(x) = \tan^{-1} x - \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \qquad (x > \tan\alpha).$$

（从下方用同样的极限论证，可得 $u \to +\infty$ 及数值 $\frac{1}{2}\pi$，与第一条公式一致。）

所以这个图像就是 $y = \tan^{-1} x$ 的图像分成两段，一段向上平移 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$，另一段向下平移 $\frac{1}{2}\pi + \alpha$。它的特征如下：

- 在每一段上都是递增的，斜率（gradient）为 $\frac{1}{1+x^2}$；
- 当 $x \to \pm\infty$ 时，$y \to -\alpha$（左端从上方趋近，右端从下方趋近），所以 $y = -\alpha$ 是两端的渐近线（asymptote）；
- 左段由 $-\alpha$ 上升至 $x = \tan\alpha$ 处的 $\frac{1}{2}\pi$（不能达到），在 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ 与 y 轴相交，并在 $\tan^{-1} x = \alpha - \frac{1}{2}\pi$ 之处，即 $x = -\cot\alpha$，与 x 轴相交；
- 右段在 $x = \tan\alpha$ 处从略高于 $-\frac{1}{2}\pi$ 的位置开始，上升至 $-\alpha$；它整段位于 x 轴下方；
- 在 $x = \tan\alpha$ 处有一个 $-\pi$ 的跳跃，而两段在该处的斜率都是 $\cos^2\alpha$。

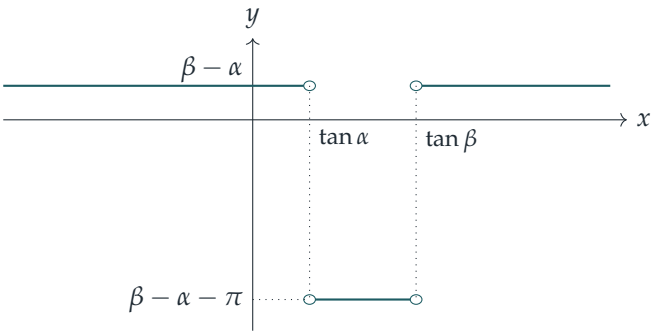


两者之差。由于 $0 < \alpha < \beta < \frac{1}{2}\pi$，我们有 $\tan\alpha < \tan\beta$，所以共有三个区间。利用每个函数的两条公式：

- 当 $x < \tan\alpha$ 时：$f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha$；
- 当 $\tan\alpha < x < \tan\beta$ 时：$f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (-\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha - \pi$；

- 当 $x > \tan\beta$ 时：$f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (-\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (-\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha$。

$\tan^{-1} x$ 项互相抵消，所以图像是一个阶梯函数（step function）：它是水平线 $y = \beta - \alpha$（位于 0 与 $\frac{1}{2}\pi$ 之间），但在 $\tan\alpha$ 与 $\tan\beta$ 之间的区间上则下降 π，变为 $y = \beta - \alpha - \pi$（位于 $-\pi$ 与 $-\frac{1}{2}\pi$ 之间）。函数在 $x = \tan\alpha$ 及 $x = \tan\beta$ 处无定义。



第 (ii) 部分

逐项求导。由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tanh^{-1} s = \dfrac{1}{1-s^2}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh^{-1}(\sin x) = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x,$$

又由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sinh^{-1} s = \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}(\tan x) = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec^2 x}} = \frac{\sec^2 x}{|\sec x|} = |\sec x|.$$

这里的平方根取正值，所以才会出现绝对值（modulus）。因此 $g'(x) = \sec x - |\sec x|$。当 $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ 时，$\cos x < 0$，所以 $|\sec x| = -\sec x$，从而

$$g'(x) = 2\sec x,$$

即所求。在另外两个区间 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ 及 $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$ 上，$\cos x > 0$，所以同样的计算得出 $g'(x) = 0$。

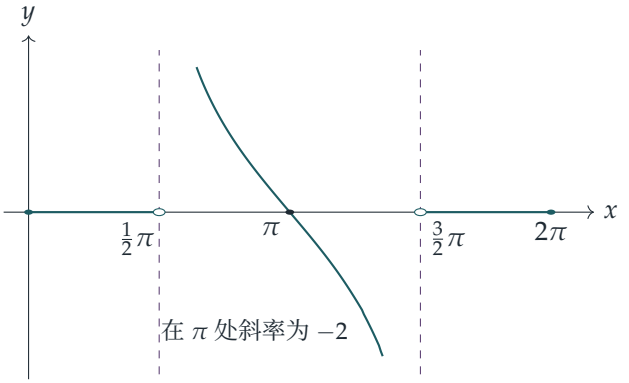
外侧的区间。在这里 g 在每个区间上都是常数。由于 $g(0) = \tanh^{-1} 0 - \sinh^{-1} 0 = 0$，同样 $g(2\pi) = 0$，我们得到当 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ 及 $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$ 时，$g(x) = 0$。

中间的区间。在这里 $g'(x) = 2\sec x < 0$，所以 g 严格递减（strictly decreasing）。在中点处，$g(\pi) = \tanh^{-1} 0 - \sinh^{-1} 0 = 0$，且 $g'(\pi) = 2\sec\pi = -2$。在两端：

- 当 $x \to \frac{1}{2}\pi^+$ 时，$\sin x \to 1$，所以 $\tanh^{-1}(\sin x) \to +\infty$，而 $\tan x \to -\infty$，所以 $-\sinh^{-1}(\tan x) \to +\infty$；因此 $g(x) \to +\infty$；

- 当 $x \to \frac{3}{2}\pi^-$ 时，$\sin x \to -1$ 且 $\tan x \to +\infty$，所以两项都令 $g(x) \to -\infty$。

此外 $g''(x) = 2\sec x \tan x$。当 $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$ 时，$\sec x$ 和 $\tan x$ 都是负数，所以 $g'' > 0$；当 $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ 时，$\sec x < 0 < \tan x$，所以 $g'' < 0$。因此 $(\pi, 0)$ 是一个拐点（point of inflection），该处斜率为 -2，而曲线关于这一点旋转对称（rotational symmetry）（事实上 $g'(2\pi - x) = g'(x)$ 且 $g(\pi) = 0$）。其实，由于 g 与 $2\tanh^{-1}(\sin x)$ 在这个区间上有相同的导数，而且两者在 π 处都等于零，所以在该区间上 $g(x) = 2\tanh^{-1}(\sin x) = 2\ln|\sec x + \tan x|$。



验算

- 取 $\alpha = 0.6$：$f_\alpha(0) = \tan^{-1}(\cot 0.6) \approx 0.9708 = \frac{1}{2}\pi - 0.6$，而 $f_\alpha(\pm 10^9) \approx -0.6$，与渐近线的预测一致。
- $g(1) = \tanh^{-1}(\sin 1) - \sinh^{-1}(\tan 1) = 1.2261 - 1.2261 = 0$，证实了平坦的部分。用电脑检验数以千计的随机点，结果与上述所有公式的误差都在 10^{-6} 以内。

常见错误

- 写成 $f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + c$，处处只用一个常数。导数为零只能在一个区间上推出常数。
- 写成 $\sqrt{\sec^2 x} = \sec x$。它其实是 $|\sec x|$，而正是这个符号，令 g 在两个区间上为零，在第三个区间上却不是。

STEP 之外

在一个区间上导数为零就迫使函数为常数，这是中值定理（Mean Value Theorem）的一个推论；而在不是区间的集合上，这个结论并不成立，两个部分都显示了这一点。第 (i) 部

分其实就是 $\tan^{-1}$ 的加法公式（addition formula）连同 $\pm\pi$ 的修正，这种分支（branch）的记账工作在复分析（complex analysis）中十分重要。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对中值定理及其推论有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。