详细解答

STEP III 2021，第 5 题

纯数学 · 极坐标曲线

STEP III 2021，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

关键思路

两条曲线都以 r 表示为 θ 的函数，所以它们在两个 r 的表达式相等之处相交；若在该处两个 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 的值亦相等，两曲线便在该处相切（touch）。把一切写成 $c=\cos\theta$ 的式子，相交条件便化为一个关于 c 的二次方程（quadratic）。这个二次方程的重根（repeated root）是相切的一种情况，但并非唯一的情况：由于 $\cos\theta$ 本身在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 处是平稳（stationary）的，所以在 $c=\pm1$ 处的单根（simple root）亦会给出 θ 的二重零点。

解答

全文设 $c=\cos\theta$，并记

$$f(\theta)=a+2\cos\theta,\qquad g(\theta)=2+\cos 2\theta=1+2\cos^2\theta.$$

注意对所有 θ 均有 $g(\theta)\geq 1$，所以第二条曲线永不经过原点 O。在 O 以外，一个 $r>0$ 的点有唯一的角 θ（相差 2π 的倍数除外）。因此两曲线只可能在 r 和 θ 都相同的点相交。

第 (i) 部分

当 $f(\theta)=g(\theta)$ 时两曲线相交，即 $a+2c=1+2c^2$，亦即

$$2\cos^2\theta-2\cos\theta+1-a=0,$$

此即所求。为两者之差命名会方便一些：

$$h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)=-(2c^2-2c+1-a).$$

何时相切？在公共点上，半径与切线（tangent）之间的夹角 ψ 满足 $\tan\psi=r\big/\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$。所以两条经过同一点 (r,θ) 的曲线在该点有相同切线，当且仅当它们的 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 亦相同。因此

两曲线在 $h(\theta)=0$ 且 $h'(\theta)=0$ 之处相切。求导得

$$h'(\theta) = -2\sin\theta + 2\sin 2\theta = 2\sin\theta\,(2\cos\theta - 1).$$

所以 $h'(\theta)=0$ 当且仅当 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 或 $\sin\theta = 0$。

> **想一想** 关于 c 的二次方程只在 $a=\frac{1}{2}$ 时有重根。那么为何还有其他 a 值?

c 的重根足以导致相切，但并非必要。映射 $\theta \mapsto \cos\theta$ 在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 处是平稳的。所以只要 $c=\pm1$ 是根，h 在该处便有 θ 的二重零点。条件 $h'=0$ 把两种可能都包括在内。

- $\cos\theta = \frac{1}{2}$：代入相交方程得 $\frac{1}{2} - 1 + 1 - a = 0$，所以 $a = \frac{1}{2}$。（等价地，判别式（discriminant）$4-8(1-a)$ 在 $a=\frac{1}{2}$ 时为零，此时重根为 $c=\frac{1}{2}$。）所以当 $a=\frac{1}{2}$ 时两曲线相切，此即所求。
- $\theta=0$，$c=1$：需要 $2-2+1-a=0$，所以 $a=1$。此时两曲线上皆有 $r=3$。
- $\theta=\pi$, $c=-1$: 需要 $2+2+1-a=0$, 所以 $a=5$。此时两曲线上皆有 $r=5-2=3$, 故 $r\geq 0$ 成立。

因此另外两个值是 $a=1$ 和 $a=5$。

第二条曲线的特征

三幅草图都包含 $r=2+\cos 2\theta$，所以我们只描述一次。它在 $\theta\to-\theta$ 和 $\theta\to\pi-\theta$ 下不变，所以它对两条坐标轴都对称（symmetric）。这里 r 由 $\theta=0,\pi$ 处的最大值 3 变到 $\theta=\pm\frac{1}{2}\pi$ 处的最小值 1。它不是椭圆。在 $\theta=\frac{1}{2}\pi$ 附近，设 $s=\sin\theta$,

$$y = r\sin\theta = (3-2s^2)s = 3s-2s^3, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = 3-6s^2 = -3 \text{ 当} s=1.$$

所以当 θ 离开 $\frac{1}{2}\pi$（而 s 降到 1 以下）时，y 反而增大。曲线在 $(0,\pm1)$ 处有一个光滑的凹陷（dimple），而不是尖点（cusp），因为该处 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -2\sin 2\theta = 0$，切线是水平的。相比之下，$x=r\cos\theta = c+2c^3$ 关于 c 递增，所以 $(\pm3,0)$ 两端只是圆滑的。

第一条曲线 $r=a+2\cos\theta$ 关于初始线（initial line）对称，因为它在 $\theta\to-\theta$ 下不变。它在 $\theta=0$ 处有 $r=a+2$，在 $\theta=\pm\frac{1}{2}\pi$ 处有 $r=a$，而（当 $a\geq 2$ 时）在 $\theta=\pi$ 处有 $r=a-2$。当 $a<2$ 时，限制 $r\geq 0$ 使曲线在 $\cos\theta=-\frac{1}{2}a$ 处被截断，曲线沿这两个方向到达 O。

第 (ii) 部分

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，

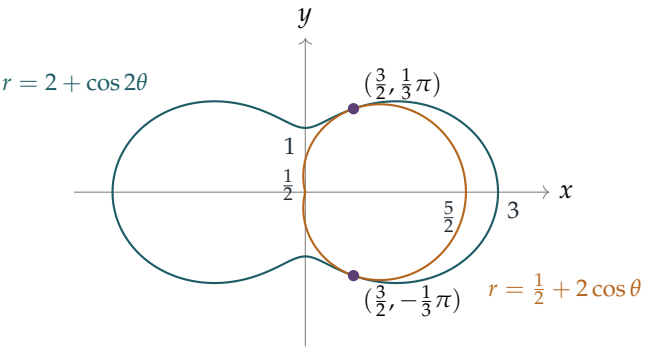
$$h(\theta) = -\left(2c^2-2c+\tfrac{1}{2}\right) = -2\left(c-\tfrac{1}{2}\right)^2 \leq 0.$$

所以第一条曲线处处位于第二条曲线之内，并只在 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 处与之相交。两者相切于

$$\theta = \pm\tfrac{1}{3}\pi, \qquad r = \tfrac{1}{2} + 1 = \tfrac{3}{2}.$$

（验算：$2 + \cos\frac{2}{3}\pi = \frac{3}{2}$，且在 $\theta = \frac{1}{3}\pi$ 处两个 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 的值都等于 $-\sqrt{3}$。）

第一条曲线只在 $\cos\theta \geq -\frac{1}{4}$ 时存在，即 $|\theta| \leq \arccos(-\frac{1}{4}) \approx 104.5°$。它由初始线上的 $r = \frac{5}{2}$ 出发，经过 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 处的 $r = \frac{1}{2}$，一直到达 O。它沿直线 $\theta = \pm\arccos(-\frac{1}{4})$ 到达 O，所以在原点处有一个角点（corner，即尖端），位置刚好在 y 轴左侧。

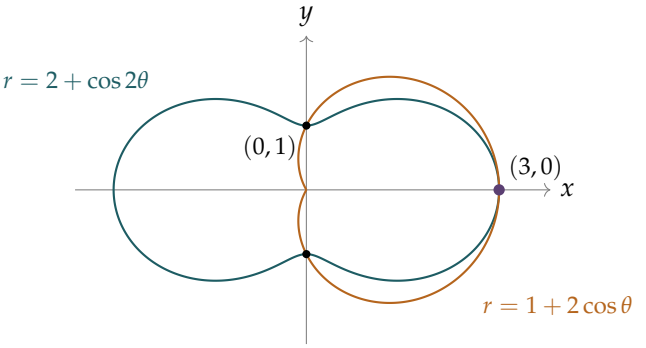


第 (iii) 部分

$a = 1$ 的情况。此时 $h(\theta) = -(2c^2 - 2c) = 2c(1 - c)$。两曲线在 $c = 1$ 或 $c = 0$ 处相交。

- 它们在 $\theta = 0$、$r = 3$ 处相切，即点 $(3, 0)$。在 $\theta = 0$ 附近有 $0 < c < 1$，所以 $h > 0$，第一条曲线在切点两侧都略为位于第二条曲线之外。
- 在 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 处，两曲线上皆有 $r = 1$：即点 $(0, \pm 1)$，也就是凹陷的底部。这里 h 随 c 变号，所以两曲线相交而穿过。第一条曲线在 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$ 时位于外侧，在 $|\theta| > \frac{1}{2}\pi$ 时位于内侧。

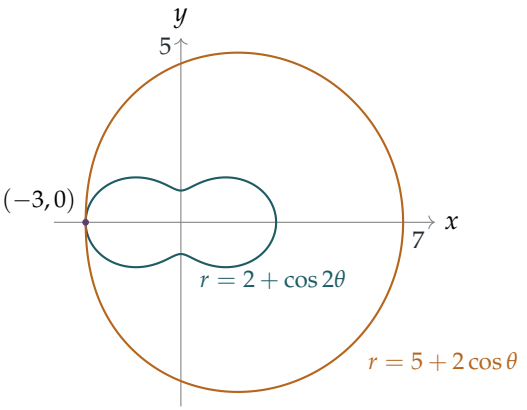
第一条曲线在 $\cos\theta \geq -\frac{1}{2}$ 时存在，即 $|\theta| \leq \frac{2}{3}\pi$。它沿直线 $\theta = \pm\frac{2}{3}\pi$ 到达 O，并在该处形成一个角点。



$a = 5$ 的情况。此时 $h(\theta) = -(2c^2 - 2c - 4) = 2(2 - c)(1 + c) \geq 0$，等号只在 $c = -1$ 时成立。所以第一条曲线完全位于第二条曲线之外，并只在

$$\theta = \pi, \qquad r = 3,$$

处与之相切，即点 $(-3, 0)$。由于 $a > 2$，现在处处有 $r > 0$，所以第一条曲线是一条闭合环线（一条没有凹陷的蚶线（limaçon），因为 $a \geq 4$）。它在 $\theta = 0$ 处有 $r = 7$，在 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 处有 $r = 5$，在 $\theta = \pi$ 处有 $r = 3$。



验算

- 在每个切点，比较两个 r 值和两个 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 值。对于 $a = 1$ 在 $\theta = 0$ 处，两者皆 $r = 3$，两个导数皆为 0；$a = 5$ 在 $\theta = \pi$ 处亦同样成立。
- 以电脑在 $-3 \leq a < 9$ 范围内以 0.01 为步长扫描，只在 $a = \frac{1}{2}$、1 和 5 时找到 $h = h' = 0$（且 $r \geq 0$）。这与因式分解（factorisation）$h' = 2\sin\theta(2\cos\theta - 1)$ 吻合。
- 点 $(0, 1)$ 位于第二条曲线上，而附近 $\theta = \frac{1}{2}\pi + 0.1$ 处的点有 $y \approx 1.015 > 1$。这证实了凹陷的存在。

常见错误

- 只做到判别式便停下，因而漏掉 $a = 1$ 和 $a = 5$。关于 $c = \cos\theta$ 的单根，仍然可以是关于 θ 的二重根。
- 把 $r = 2 + \cos 2\theta$ 画成椭圆，或在 $(0, \pm 1)$ 处画成尖点而不是光滑的凹陷。
- 在 $a = \frac{1}{2}$ 或 $a = 1$ 时画出蚶线的内环。该内环上 $r < 0$，题目已将之排除。

STEP 之外

相切实际上是关于重数（multiplicity）的命题。两条曲线在其方程之差沿曲线有重零点之处相切，而参数化（parametrisation）可以制造或隐藏这类零点，正如本题中的 $\cos\theta$ 一样。在大学第一门关于曲线的课程中，这会发展成接触阶（order of contact）的概念，而极坐标（polar）曲线的曲率（curvature）$\left(r^2+2r'^2-rr''\right)/\left(r^2+r'^2\right)^{3/2}$ 正好解释了 $2+\cos 2\theta$ 的凹陷从何而来。如想进一步了解参数曲线及其几何，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）；至于光滑性与相切背后的分析，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。