详细解答

STEP III 2021，第 4 题

纯数学 · 向量与投影

STEP III 2021，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

关键思路

这里的一切都靠纯量积（scalar product）完成：两个向量之间的夹角可从 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\text{夹角})$ 读出；而投影（projection）是线性（linear）的，所以 $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ 的投影就是 $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)$。第 (i) 部分证明两个长度相等的向量的平均会平分（bisect）它们之间的夹角。在第 (iii) 部分，投影 $\mathbf{a}_1$ 与 $\mathbf{b}_1$ 的长度通常不同，所以除非出现某种特殊情况，否则我们应预期平分不成立。条件可以漂亮地因式分解（factorise），正好对应两种特殊情况。

解答

第 (i) 部分

由于 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$ 且 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \cos\theta$，

$$|\mathbf{m}|^2 = \tfrac{1}{4}\left(1 + 2\cos\theta + 1\right) = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\tfrac{\theta}{2},$$

所以 $|\mathbf{m}| = \cos\frac{\theta}{2}$，而因为 $0 < \theta < \pi$，它是正数。特别地，$\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$。此外

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\tfrac{\theta}{2} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{b}.$$

因此 $\mathbf{m}$ 与 $\mathbf{a}$ 之间夹角的余弦是 $\cos^2\frac{\theta}{2}\big/\cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2}$，对 $\mathbf{b}$ 亦然。所以两个夹角都是 $\frac{\theta}{2}$。由于 $\mathbf{m}$ 位于 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 所在的平面上，而两个夹角之和为 θ，故 $\mathbf{m}$ 平分 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 之间的夹角。

第 (ii) 部分

按定义，以 $\mathbf{c}$ 为单位法向量（unit normal），且 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \cos\alpha$，

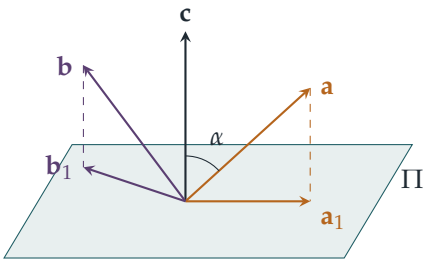
$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a} - \cos\alpha\,\mathbf{c}, \qquad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b} - \cos\beta\,\mathbf{c}.$$

于是 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{c} = \cos\alpha - \cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) = 0$，因为 $|\mathbf{c}| = 1$。同理 $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c} = 0$。

由于 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{c} = 0$，我们得到 $|\mathbf{a}_1|^2 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a} - \cos\alpha\,\mathbf{c}) = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}$，而且

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

由于 α 是锐角，$\sin\alpha > 0$，所以 $|\mathbf{a}_1| = \sin\alpha$。同样地 $|\mathbf{b}_1| = \sin\beta$。两者皆非零，所以夹角 ϕ 有定义。



至于投影之间的夹角，再次利用 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{c} = 0$ 消去一项：

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{b} - \cos\beta\,\mathbf{c}) = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}) = \cos\theta - \cos\alpha\cos\beta.$$

除以 $|\mathbf{a}_1||\mathbf{b}_1| = \sin\alpha\sin\beta$，得

$$\cos\phi = \frac{\cos\theta - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

即为所求。

第 (iii) 部分

投影是线性的，所以

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{m} - (\mathbf{m}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{c} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} - \cos\alpha\,\mathbf{c}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} - \cos\beta\,\mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1).$$

我们假设 $\mathbf{m}_1 \neq \mathbf{0}$，否则它没有方向，不可能平分任何东西。由于 $\mathbf{m}_1$ 是 $\mathbf{a}_1$ 与 $\mathbf{b}_1$ 的正系数组合，它位于两者所在的平面上，并且夹在两者之间。所以它平分该夹角，当且仅当它与 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{b}_1$ 所成的角相等：

$$\frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}.$$

（我们已约去公因子 $|\mathbf{m}_1|$，而 cos 在 $[0, \pi]$ 上是一一对应（one-to-one）的。）

> ? **想一想** 为何不直接把第 (i) 部分应用于 $\mathbf{a}_1$ 与 $\mathbf{b}_1$？

第 (i) 部分需要 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$。这里 $|\mathbf{a}_1| = \sin\alpha$，$|\mathbf{b}_1| = \sin\beta$，两者通常不同。所以我们必须实际计算。

设 $P = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1$，$s = \sin\alpha$，$t = \sin\beta$。则

$$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \tfrac{1}{2}(s^2 + P), \qquad \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = \tfrac{1}{2}(P + t^2).$$

两边乘以 $2st > 0$，条件变为

$$\begin{aligned} t(s^2 + P) = s(t^2 + P) &\iff st(s - t) - P(s - t) = 0 \\ &\iff (s - t)(st - P) = 0. \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{m}_1$ 平分该夹角，当且仅当 $s = t$ 或 $P = st$。

- $s = t$ 即 $\sin\alpha = \sin\beta$。由于 sin 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上严格递增，而两个角都是锐角，此式成立当且仅当 $\alpha = \beta$。
- 由第 (ii) 部分，$P = \cos\theta - \cos\alpha\cos\beta$。所以 $P = st$ 即

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta).$$

每一步都是等价 (equivalence) 关系，所以 $\mathbf{m}_1$ 平分 $\mathbf{a}_1$ 与 $\mathbf{b}_1$ 之间的夹角，当且仅当 $\alpha = \beta$ 或 $\cos\theta = \cos(\alpha - \beta)$。

从几何角度看，第一种情况表示 $\mathbf{a}_1$ 与 $\mathbf{b}_1$ 长度相等，所以第 (i) 部分终究适用。第二种情况表示 $\cos\phi = 1$：两个投影指向同一方向（当 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{c}$ 共面（coplanar），且 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 位于 $\mathbf{c}$ 的同一侧时）。此时夹角为零，平分是平凡成立的。

验算

- 取 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$（本题不容许，但是一个有用的极限情况）。此时 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 本身已在平面上，公式给出 $\cos\phi = \cos\theta$，理应如此。
- 取 $\alpha = \frac{\pi}{3}$、$\beta = \frac{\pi}{4}$ 及 $\theta = \frac{\pi}{2}$，公式给出 $\cos\phi = -\frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{6}/4} = -1/\sqrt{3} \approx -0.577$。这与明确构造出这些向量后的结果一致。
- $\cos\phi$ 的公式及因式分解后的平分条件，都已用电脑在数千组随机单位向量三元组上验证。

常见错误

- 忘记 $|\mathbf{a}_1| \neq 1$。单位向量的投影并非单位向量，所以分母 $\sin\alpha\sin\beta$ 不可缺少。
- 以为 $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$ 的角平分线总是 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$。这只在长度相等时成立。一般而言，角平分线是 $\mathbf{a}_1/|\mathbf{a}_1| + \mathbf{b}_1/|\mathbf{b}_1|$。
- 除以 $\sin\alpha - \sin\beta$ 而不是因式分解，因而遗漏了 $\alpha = \beta$ 的情况。

STEP 之外

投影到平面上是一个线性映射（*linear map*） $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$，其矩阵为 $I - \mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$。线性映射保持和，但不保持长度或角度，这正是本题结果如此的原因。$\cos\phi$ 的公式其实是乔装了的球面余弦定理（spherical cosine rule）。这里 ϕ 是以 **a**、**b** 及 **c** 为顶点的球面三角形（spherical triangle）在顶点 **c** 处的角，其三边为 α、β 及 θ。关于投影与正交性（orthogonality），可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。