详细解答

STEP III 2021，第 3 题

纯数学 · 积分不等式

STEP III 2021，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

关键思路

对被升至 n 次幂的那个式子求导。对于 $u = \sec x + \tan x$，其导数（derivative）是 $u \sec x$，这使 $u^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 可以直接积分，所以要做的就是把 $I_{n+1} + I_{n-1}$ 的被积函数（integrand）改写成这个形式。至于不等式（inequality），则来自比较被积函数 $u^n = u^{n-1} \cdot u$ 与可直接积分的 $u^{n-1} \cdot u'$：若 $u < u'$，则积分（integral）小于 $[u^n/n]$。

解答

第 (i) 部分

设 $u = \sec x + \tan x$。则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sec x \tan x + \sec^2 x = \sec x\,(\sec x + \tan x) = u \sec x.$$

此外，利用 $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$，

$$u^2 + 1 = \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x + 1 = 2\sec^2 x + 2\sec x \tan x = 2u \sec x = 2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

因此对于 $n \geq 1$，

$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_{n-1} &= \int_0^\beta u^{n-1}\left(u^2+1\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^\beta u^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}\Big[u^n\Big]_0^\beta \\ &= \frac{2}{n}\left((\sec\beta + \tan\beta)^n - 1\right), \end{aligned}$$

因为在 $x = 0$ 时 $u = 1$。两边除以二，即得所求的恒等式（identity）。

想一想 恒等式涉及 I_{n+1} 和 I_{n-1}，但不等式却是关于 I_n 的。怎样才能把中间那一项夹进去?

比较 u^2+1 与 $2u$。我们有 $u^2+1-2u=(u-1)^2\geq 0$，而当 $0<x\leq\beta$ 时，$\sec x>1$ 且 $\tan x>0$，所以 $u>1$，不等式在该处严格成立。乘以 $u^{n-1}>0$，得在 $(0,\beta]$ 上 $u^{n+1}+u^{n-1}>2u^n$；积分后（被积函数连续，且不等式在一个长度为正的区间上严格成立）得

$$I_{n+1}+I_{n-1}>2I_n,\qquad \text{所以}\qquad I_n<\tfrac{1}{2}\left(I_{n+1}+I_{n-1}\right)=\frac{1}{n}\left((\sec\beta+\tan\beta)^n-1\right).$$

（等价地说：当 $x>0$ 时 $u'-u=u(\sec x-1)>0$，所以 $I_n=\int_0^\beta u^{n-1}u\,\mathrm{d}x<\int_0^\beta u^{n-1}u'\,\mathrm{d}x$。正是这个观点可以延用到第 (ii) 部分。）

第 (ii) 部分

记 $c=\cos\beta$，则 $0<c<1$，并设 $v=c\sec x+\tan x$。则

$$v'=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=c\sec x\tan x+\sec^2 x.$$

在端点处，$v(0)=c=\cos\beta$，而 $v(\beta)=1+\tan\beta$，正好是目标式中的两个数。因此上界就是 $\frac{1}{n}[v^n]_0^\beta=\int_0^\beta v^{n-1}v'\,\mathrm{d}x$，只需证明在整个 $[0,\beta]$ 上 $v<v'$ 便足够。

想一想 在第 (i) 部分中，u^2+1 恰好等于 $2u'$。对于 v，相应的关系是甚么?

重复第 (i) 部分的计算，

$$v^2+1=c^2\sec^2x+2c\sec x\tan x+\tan^2x+1=(1+c^2)\sec^2x+2c\sec x\tan x,$$

所以

$$2v'-(v^2+1)=(1-c^2)\sec^2x=\sin^2\beta\,\sec^2x.$$

这不再是等式，但剩余项是正的。结合 $v^2+1-2v=(v-1)^2$，

$$2(v'-v)=(v-1)^2+\sin^2\beta\,\sec^2x>0,$$

因为当 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ 时 $\sin\beta\neq 0$。故对每个 $x\in[0,\beta]$，$v<v'$。

最后，在 $[0,\beta]$ 上 $v>0$（因为 $c>0$、$\sec x>0$ 且 $\tan x\geq 0$），所以 $v^{n-1}>0$，从而 $v^n=v^{n-1}v<v^{n-1}v'$。在 $[0,\beta]$ 上积分，对于 $n\geq 1$，

$$J_n=\int_0^\beta v^n\,\mathrm{d}x<\int_0^\beta v^{n-1}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\Big[v^n\Big]_0^\beta=\frac{1}{n}\left((1+\tan\beta)^n-\cos^n\beta\right),$$

得证。

验算

- 当 $n = 1$ 时，(i) 中的恒等式说 $\frac{1}{2}(I_2 + \beta) = \sec\beta + \tan\beta - 1$。取 $\beta = 1$，数值积分（numerical integration）得两边均为 2.40822…。
- 取 $\beta = 1$、$n = 3$：数值上 $I_3 \approx 8.774$，而上界为 12.863；$J_3 \approx 3.326$，而上界为 5.523。
- 在 (ii) 中形式上代入 $\cos\beta = 1$，J_n 就变成 I_n，剩余项 $\sin^2\beta\sec^2 x$ 亦随之消失：第 (ii) 部分确实是第 (i) 部分的一个扰动（perturbation）。

常见错误

- 忘记检查正负：把 $v < v'$ 乘以 v^{n-1} 需要 $v^{n-1} > 0$，这正是 $v > 0$ 之所以重要的原因。
- 只得出 $\leq$：严格不等式需要 $u > 1$（或 $\sin\beta \neq 0$）在一个区间上成立，而不仅仅在一点上成立。
- 计算 $v(\beta)$ 时粗心：$\sec\beta\cos\beta = 1$，$1 + \tan\beta$ 正是由此而来。

STEP 之外

“若逐点有 $0 < f \leq g$，且在某处严格成立，则 $\int f < \int g$”这个论证，就是积分的单调性（monotonicity），分析课程会从黎曼积分（Riemann integral）的定义出发把它仔细证明。把一个难处理的被积函数与一个精确的导数作比较，是估计积分和级数（series）上下界的标准方法，它亦会在积分判别法（integral test）等估计中再次出现。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）严谨地讲述了积分以及这类比较论证。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。