详细解答

STEP III 2021，第 2 题

纯数学 · 行列式与不等式

STEP III 2021，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

关键思路

将 x、y、z 各自的定义去分母后，都会得到一条关于 a、b、c 的线性（linear）方程。三条这样的方程组成一个齐次线性方程组（homogeneous linear system），而它有非零解 (a,b,c)，所以系数矩阵（matrix of coefficients）必定是奇异（singular）的，即其行列式（determinant）为零。这个行列式正好就是我们想要的、关于 x、y、z 的对称（symmetric）表达式。之后，只要把目标式改写成 x、y、z 的式子，再运用平方和的基本性质和算术－几何平均不等式（AM–GM），就能得出那些不等式。

解答

第 (i) 部分

由于 a、b、c 互不相同，所有分母都不为零。去分母，得

$$x(b-c)=a, \qquad y(c-a)=b, \qquad z(a-b)=c.$$

现在逐行展开矩阵乘积：

$$\begin{aligned} a-xb+xc &= a-x(b-c)=a-a=0,\\ ya+b-yc &= b-y(c-a)=b-b=0,\\ -za+zb+c &= c-z(a-b)=c-c=0, \end{aligned}$$

这正是所求的矩阵方程。

把这个 3×3 矩阵记作 M。由于 a、b、c 互不相同，它们不会全为零，所以 M 把一个非零向量（vector）映射到零向量。

想一想 为甚么这样就迫使 $\det M = 0$?

若 $\det M \neq 0$, 则 M^{-1} 存在; 在 $M\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 两边左乘 M^{-1}, 便得 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, 与 $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ 矛盾。所以 $\det M = 0$。沿第一行展开,

$$\begin{aligned}\det M &= 1\cdot(1+yz) + x(y-yz) + x(yz+z)\\ &= 1 + yz + xy - xyz + xyz + xz\\ &= 1 + xy + yz + zx.\end{aligned}$$

令它等于零，即得 $yz + zx + xy = -1$。

至于不等式，左边是 $x^2+y^2+z^2$。利用恒等式（identity）$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$,

$$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2 + 2 \geq 2,$$

因为实数 $x+y+z$ 的平方是非负的。这就是所求的结果。

第 (ii) 部分

这里的分母都是正数，去分母后得 $x(b+c) = 2a$，其余类似。重新整理成关于 a、b、c 的线性方程:

$$\begin{pmatrix} -2 & x & x \\ y & -2 & y \\ z & z & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

（第一行即 $-2a + x(b+c) = 0$，其余两行类似。）由于 $a,b,c > 0$，这个向量非零，所以与第 (i) 部分完全一样，行列式为零:

$$\begin{aligned}0 &= -2(4-yz) - x(-2y-yz) + x(yz+2z)\\ &= -8 + 2yz + 2xy + xyz + xyz + 2xz\\ &= -8 + 2(xy+yz+zx) + 2xyz.\end{aligned}$$

两边除以 2，得 $xyz + yz + zx + xy = 4$。

第一个不等式。窍门是把左边每个括号除以右边对应的括号:

$$\frac{2a+b+c}{b+c} = \frac{2a}{b+c} + 1 = 1 + x,$$

另外两个也类似。由于 $(b+c)(c+a)(a+b) > 0$，所求不等式等价于 $(1+x)(1+y)(1+z) > 5$。展开并利用刚证得的结果,

$$(1+x)(1+y)(1+z) = 1 + (x+y+z) + (xy+yz+zx) + xyz = 5 + (x+y+z).$$

由于 x、y、z 都是正数，上式大于 5，第一个不等式得证。

第二个不等式。按同样的计算，现在需要证明 $x+y+z>2$。记 $S=x+y+z$。

> ? **想一想** 我们知道 $xy+yz+zx+xyz=4$。这怎样能迫使 S 不会太小?

$xy+yz+zx$ 和 xyz 都可以用 S 给出上界：

- $S^2-3(xy+yz+zx)=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\geq 0$，所以 $xy+yz+zx\leq \frac{1}{3}S^2$；
- 对正数 x、y、z 应用算术—几何平均不等式，得 $xyz\leq\left(\frac{1}{3}S\right)^3=\frac{1}{27}S^3$。

两式相加，

$$4=xy+yz+zx+xyz\leq\frac{1}{3}S^2+\frac{1}{27}S^3.$$

当 $S>0$ 时，右边是 S 的递增函数 (increasing function)，而当 $S=3$ 时它等于 $3+1=4$。所以若 $S<3$，右边便会小于 4，这是不可能的。因此 $S\geq 3$，而

$$\frac{(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)}{(b+c)(c+a)(a+b)}=5+S\geq 8>7,$$

第二个不等式得证（事实上更得出较强的下界 8，当 $a=b=c$ 时取得）。

验算

- 在第 (ii) 部分取 $a=b=c=1$：左边为 $4^3=64$，而 $(b+c)(c+a)(a+b)=8$，所以比值为 8，与 $x=y=z=1$、$S=3$ 时的 $5+S$ 吻合。此外 $xyz+xy+yz+zx=1+3=4$。
- 在第 (i) 部分取 $(a,b,c)=(0,1,2)$：则 $x=0$、$y=\frac{1}{2}$、$z=-2$，而 $xy+yz+zx=-1$，符合要求；平方和为 $\frac{17}{4}\geq 2$。
- 用电脑对 20 000 组随机有理数三元组验算，两条恒等式都准确成立；第 (ii) 部分找到的最小比值约为 8.0001，而当 $a=b=1$、$c=10^{-6}$ 时比值约为 9.0，所以下界 8 确实是最小值，远高于 7。

常见错误

- 断言 $\det M=0$ 却不说明理由：关键在于 (a,b,c) 是非零向量，这在第 (i) 部分需要“互不相同”，在第 (ii) 部分需要“正数”。
- 把 $2a+b+c$ 除以 $b+c$ 时得出 $1+\frac{1}{2}x$ 而不是 $1+x$：记住 x 本身已经包含因数 2。
- 用 $xy+yz+zx<4$（一个上界）去尝试给 S 找下界；不等式的方向必须反过来，如上文所示。

STEP 之外

方阵把某个非零向量映射到零，当且仅当其行列式为零——这是线性代数（linear algebra）的核心：特征值（eigenvalues）正是通过 $\det(A-\lambda I)=0$ 求得的。第 (ii) 部分中的下界 $S \geq 3$ 其实就是改头换面的 Nesbitt 不等式（Nesbitt's inequality）$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$。线性代数方面，可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）；若想多做这类不等式，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶题集》）是极佳的练习材料。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。