详细解答

STEP III 2021，第 10 题

力学 · 缠绕绳的运动

STEP III 2021，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

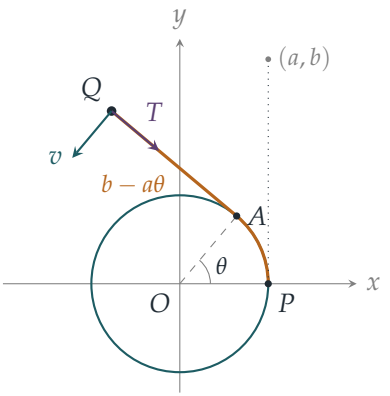
关键思路

用绳子直线部分转过的角度 θ 来描述一切。绳子沿切线（tangent）离开圆柱（cylinder），所以质点的位置等于切点加上一个长度为 $b - a\theta$ 的切向量。求导后可见质点的速度永远与绳子垂直，因此张力（tension）不做功（work），速率始终不变。在每一瞬间，质点都在一个以绳子离开圆柱之点为圆心的圆上运动，而张力提供所需的向心力（centripetal force）。

解答

我们把质点视为在光滑（smooth）水平桌面上运动的一点，因此它所受的唯一水平力就是轻而不可伸长的绳（light inextensible string）中的张力 T（重量由桌面的法向反作用力（normal reaction）平衡）。整个过程中绳子都保持拉紧。

要令绳子绕到圆柱上，冲量（impulse）必须使质点从 (a, b) 沿 x 负方向出发，于是绳子按逆时针（anticlockwise）方向转动。设 A 为时刻 t 时绳子直线部分离开圆柱之点。



第 (i) 部分

由于通往 P 的半径已转过 θ，点 A 为 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$。绕在圆柱上的绳长就是弧 PA，长度为 $a\theta$，所以直线部分的长度为 $b-a\theta$。它沿着 A 点的切线、朝 θ 增大的方向伸出，即单位向量（unit vector）$(-\sin\theta, \cos\theta)$ 的方向。（当 $\theta = 0$ 时这向量是 $(0,1)$，与初始位置 (a,b) 吻合。）因此质点位于

$$x = a\cos\theta - (b-a\theta)\sin\theta, \qquad y = a\sin\theta + (b-a\theta)\cos\theta.$$

利用积法则（product rule）及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(b-a\theta) = -a\dot\theta$，对 t 求导，得

$$\dot x = -a\dot\theta\sin\theta + a\dot\theta\sin\theta - (b-a\theta)\dot\theta\cos\theta = -(b-a\theta)\dot\theta\cos\theta,$$
$$\dot y = a\dot\theta\cos\theta - a\dot\theta\cos\theta - (b-a\theta)\dot\theta\sin\theta = -(b-a\theta)\dot\theta\sin\theta.$$

因此 $\dot x^2 + \dot y^2 = (b-a\theta)^2\dot\theta^2$；又因 $b-a\theta > 0$ 且 $\dot\theta > 0$（绳子正在绕上去），速率为

$$v = (b-a\theta)\dot\theta.$$

第 (ii) 部分

> ? **想一想** 为甚么速率应该一直等于 u？绳子明明一直在拉着质点。

由第 (i) 部分，速度为 $-(b-a\theta)\dot\theta\,(\cos\theta, \sin\theta)$，与半径 OA 平行，因此与方向为 $(-\sin\theta, \cos\theta)$ 的绳子垂直。张力沿绳子作用，所以它做功的速率 $\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}$ 在每一瞬间都是零。没有其他水平力作用，所以动能（kinetic energy）以至速率都保持不变。初始速率为 u，故

$$\dot\theta\,(b-a\theta) = u,$$

即为所求。

第 (iii) 部分

由 (ii)，速度为 $\mathbf{v} = -u(\cos\theta, \sin\theta)$，其中 u 为常数，所以加速度为

$$\dot{\mathbf{v}} = -u\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta).$$

它的大小为 $u\dot{\theta}$，方向由质点指向 A，恰好沿着绳子。（等价地说：在每一瞬间，质点以速率 u 绕 A 在半径为 $b - a\theta$ 的圆上运动，所以它的加速度是指向 A 的 $u^2/(b - a\theta)$。）沿绳子方向应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$T = mu\dot{\theta} = \frac{mu^2}{b - a\theta}.$$

余下要做的是把 $b - a\theta$ 以 t 表示。将 (ii) 对 t 积分，并利用 $t = 0$ 时 $\theta = 0$，得

$$b\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2 = ut.$$

于是

$$(b - a\theta)^2 = b^2 - 2a\left(b\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2\right) = b^2 - 2aut,$$

又因 $b - a\theta > 0$，我们取正根，$b - a\theta = \sqrt{b^2 - 2aut}$。因此

$$T = \frac{mu^2}{\sqrt{b^2 - 2aut}},$$

即为所求。

验算

- 当 $t = 0$ 时张力为 mu^2/b：质点起初以速率 u 绕 P 在半径为 b 的圆上运动，与预期一致。
- 当 $a\theta = b$ 时绳子完全绕上，这发生在 $t = b^2/(2au)$；此时 $b^2 - 2aut = 0$，张力无限增大，因为在速率不变的情况下，瞬时圆的半径缩小至零。
- 量纲（dimensions）：b^2 和 aut 都是面积，而 mu^2/长度 是力。
- 我们用电脑验证了结果：对 a、b、u、m 的多组随机取值，以数值方法逐步模拟运动，并以数值方法对位置求导；速率保持为 u，而量得沿绳方向的力与 $mu^2/\sqrt{b^2 - 2aut}$ 相符，相对误差约为 3×10^{-5}。

常见错误

- 假设绕 O 的角动量（angular momentum）守恒。其实并不守恒：张力沿圆柱的切线作用，而这条切线不经过 O，所以张力对 O 有力矩（moment）。这里守恒的量是能量。

- 把直线部分的长度当作 b 而非 $b - a\theta$，忘记了已经绕在圆柱上的那段绳子。
- 在计算张力时，把质点路径的半径 OQ，而非直线长度 AQ，当作曲率半径（radius of curvature）。

STEP 之外

绳子从一条曲线上解开（或绕上去）时，绳端描出的路径称为渐开线（involute）；圆的渐开线是大多数齿轮齿形的形状，因为它能令互相啮合的齿轮平稳地传递运动。这道题也展示了大学一年级力学中会遇到的一个普遍原理：与速度垂直的约束力（constraint force）不做功，所以即使动量（momentum）和角动量不守恒，能量仍可以守恒。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对这类问题有很好的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。