详细解答

STEP III 2021，第 1 题

纯数学 · 参数曲线的法线

STEP III 2021，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

关键思路

两部分都依循同一套步骤：先对参数方程（parametric equations）求导，再取 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的负倒数（negative reciprocal），得出法线（normal）的斜率（gradient），然后整理方程。整理的过程正是最有趣的地方。把整条方程乘开以消去分数，三角函数项便会化简成一条简短而对称的直线方程。一旦直线写成 $x\sin\phi + y\cos\phi = \ldots$ 或 $x\cos\phi + y\sin\phi = \ldots$ 的形式，它的几何性质（截距（intercepts）、与原点的距离）便一眼可见。

解答

第 (i) 部分

对 t 求导，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 12\cos^2 t\,\sin t, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 12\cos t - 12\sin^2 t\cos t = 12\cos t\,(1-\sin^2 t) = 12\cos^3 t.$$

因此，当 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$（此时 $\sin t$ 和 $\cos t$ 均不为零），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{12\cos^3 t}{12\cos^2 t\sin t} = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

在 $t = \phi$ 处，切线（tangent）的斜率为 $\cot\phi$，所以法线的斜率为 $-\tan\phi = -\dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}$。因此法线为

$$y - 12\sin\phi + 4\sin^3\phi = -\frac{\sin\phi}{\cos\phi}(x + 4\cos^3\phi).$$

乘以 $\cos\phi$，并把 x 和 y 项移到左方：

$$\begin{aligned} x\sin\phi + y\cos\phi &= 12\sin\phi\cos\phi - 4\sin^3\phi\cos\phi - 4\cos^3\phi\sin\phi \\ &= 12\sin\phi\cos\phi - 4\sin\phi\cos\phi\,(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\ &= 8\sin\phi\cos\phi. \end{aligned}$$

所以法线为

$$\boxed{x\sin\phi + y\cos\phi = 8\sin\phi\cos\phi} \qquad \text{或等价地} \qquad \frac{x}{\cos\phi} + \frac{y}{\sin\phi} = 8.$$

第二种形式显示法线与两轴相交于 $(8\cos\phi, 0)$ 和 $(0, 8\sin\phi)$。

相切。设 $P = (8\cos^3\phi,\ 8\sin^3\phi)$。我们需要证明三件事。

*P 在曲线 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 上。*由于 $0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$，两个坐标都是正数，所以其实数立方根（cube root）分别是 $2\cos\phi$ 和 $2\sin\phi$。因此 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4\cos^2\phi + 4\sin^2\phi = 4$。

*P 在法线上。*代入可得

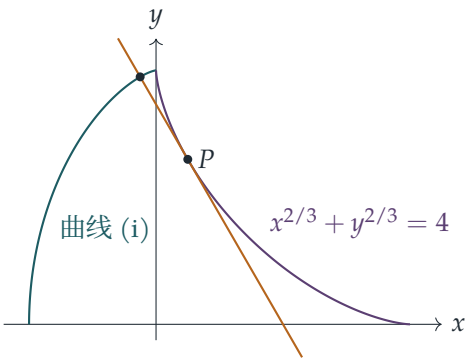
$$8\cos^3\phi\sin\phi + 8\sin^3\phi\cos\phi = 8\sin\phi\cos\phi\,(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = 8\sin\phi\cos\phi.$$

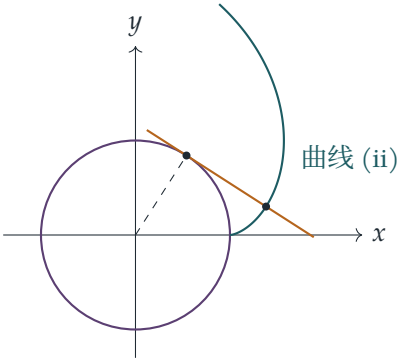
*两者在 P 处的斜率相同。*对 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 进行隐函数微分（implicit differentiation）（当 $x, y > 0$ 时成立），

$$\tfrac{2}{3}x^{-1/3} + \tfrac{2}{3}y^{-1/3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} = -\frac{2\sin\phi}{2\cos\phi} = -\tan\phi \ \text{ 在}P,$$

这正好是法线的斜率。

一条穿过曲线上某点、且斜率与曲线在该点的斜率相同的直线，就是曲线在该点的切线。所以法线是 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 在 P 处的切线，得证。





两幅图中，曲线（青色）上某点的法线（琥珀色）都与第二条曲线（紫红色）相切；两幅图都是就某个特定的 ϕ 值绘制的。

第 (ii) 部分

对 t 求导（对 $t\sin t$ 和 $t\cos t$ 项使用乘积法则（product rule）），

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t.$$

当 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ 时，$t\cos t \neq 0$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{t\sin t}{t\cos t} = \tan t$。在 $t = \phi$ 处，法线的斜率为 $-\cot\phi = -\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}$，其方程为

$$y - \sin\phi + \phi\cos\phi = -\frac{\cos\phi}{\sin\phi}(x - \cos\phi - \phi\sin\phi).$$

乘以 $\sin\phi$，

$$y\sin\phi - \sin^2\phi + \phi\sin\phi\cos\phi = -x\cos\phi + \cos^2\phi + \phi\sin\phi\cos\phi.$$

两边的 $\phi\sin\phi\cos\phi$ 项互相抵消，再利用 $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$，剩下

$$\boxed{x\cos\phi + y\sin\phi = 1}.$$

想一想 怎样可以不求垂足（foot of the perpendicular）而求出原点到一条直线的距离?

点 (x_0, y_0) 到直线 $ax + by = c$ 的距离是 $\dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$。这里 $(x_0, y_0) = (0,0)$、$a = \cos\phi$、$b = \sin\phi$ 及 $c = 1$，所以距离为

$$\frac{|-1|}{\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi}} = 1.$$

你也可以直接看出来：$(\cos\phi, \sin\phi)$ 是垂直于该直线的单位向量（unit vector），而点 $(\cos\phi, \sin\phi)$ 本身亦满足该方程。所以从 O 出发的垂足是 $(\cos\phi, \sin\phi)$，距离为 1。

该曲线。无论 ϕ 取何值，每条法线与原点的距离都是 1。一条与 O 相距 1 的直线，只会在垂足处与以 O 为圆心、半径为 1 的圆相交，而且在该处与半径垂直。因此它是该圆的切线。所以每条法线都是

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1},$$

的切线，切点为 $(\cos\phi, \sin\phi)$。

验算

- 在 (i) 中取 $\phi = \frac{1}{3}\pi$。曲线上的点为 $(-\frac{1}{2},\ 6\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3}) = (-0.5,\ 7.794)$，而法线 $2x + \frac{2}{\sqrt{3}}y = 8$ 与两轴相交于 $(4,0)$ 和 $(0, 4\sqrt{3}) \approx (0, 6.928)$。点 $P = (1,\ 3\sqrt{3}) \approx (1,\ 5.196)$ 满足 $2 + 6 = 8$，所以它在法线上，而且 $1^{2/3} + (3\sqrt{3})^{2/3} = 1 + 3 = 4$。

- 在 (ii) 中，当 $\phi \to 0$ 时，曲线从单位圆上的 $(1,0)$ 开始，而该处的法线趋向铅垂线 $x = 1$，这确实是 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线。
- 用电脑对一千个随机的 ϕ 值进行验算，在舍入误差范围内证实了所有法线方程、(i) 中的相切关系，以及 (ii) 中的单位距离。

常见错误

- 在 (i) 中把 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 算错：$12\cos t - 12\sin^2 t \cos t$ 可化简为 $12\cos^3 t$，正是这个因式分解（factorisation）令斜率变得如此简单。
- 在 (i) 中只验证 P 在法线上。一条穿过曲线上某点的直线不一定是该点的切线；斜率也必须相同。
- 在 (ii) 中只答“一个圆”，却没有给出它的方程、圆心和半径。

STEP 之外

一条曲线所有法线的包络线（envelope）称为该曲线的*渐屈线*（evolute）。它是曲率中心（centres of curvature）的轨迹（locus）。因此第 (i) 部分显示星形线（astroid）$x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 是第一条曲线的渐屈线。在 (ii) 中，该曲线是单位圆的*渐开线*（involute）（即从线辘上拉紧解开的绳子末端所描出的路径），而它的渐屈线就是该圆。圆的渐开线是大多数齿轮齿形的轮廓。这些概念属于曲线的微分几何（differential geometry）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）以优美的几何方式探讨这类平面曲线的推理，是很好的参考读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。