详细解答

STEP II 2021，第 9 题

力学 · 静力学

STEP II 2021，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

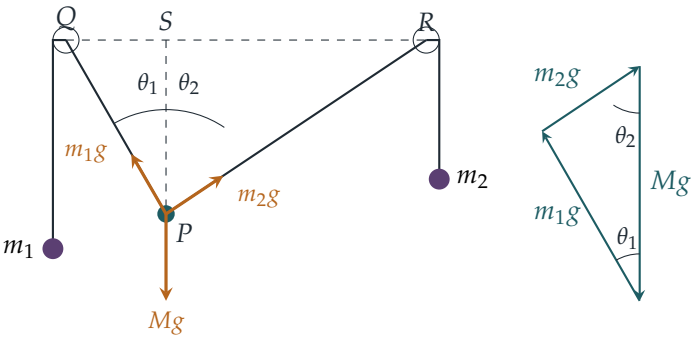
www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

关键思路

由于滑轮（pulley）是光滑的，每段绳的张力（tension）都等于其远端所悬挂质点的重量，所以作用在 P 上的三个力，大小之比为 $m_1 : m_2 : M$。这三个力首尾相接，组成一个力三角形（triangle of forces），三边分别为 $m_1 g$、$m_2 g$ 和 Mg，而各内角则由 θ_1 和 θ_2 构成。对这个三角形应用余弦定律（cosine rule），便能得出所有结果：题中的不等式来自要求该三角形存在且两个角均为锐角（acute），而所求的比则来自 $\tan\theta_1$ 和 $\tan\theta_2$。

解答

模型。各质点（particle）视为点质量，绳是轻而不可伸长的，滑轮细小且光滑。因此 PQ 段的张力等于支撑 m_1 的铅直段的张力，而 m_1 处于平衡（equilibrium），故 $T_1 = m_1 g$。同理，PR 段的张力为 $T_2 = m_2 g$。记 $h = SP$。



第 (i) 部分

在 P 点沿水平和铅直方向分解（并约去 g）：

$$m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2, \qquad m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_2 = M. \tag{$*$}$$

等价地说，把三个力首尾相接，会组成一个封闭三角形，三边为 $m_1 g$、$m_2 g$、Mg（见图右方）。边 Mg 是铅直的，所以边 Mg 与边 $m_1 g$ 之间的夹角为 θ_1（与边 $m_2 g$ 相对），而 Mg 与 $m_2 g$ 之间的夹角为 θ_2（与 $m_1 g$ 相对）。第三个角与 Mg 相对，大小为 $180^\circ - \theta_1 - \theta_2$。

如果你较喜欢用代数而非图形，同样的结果亦可直接由 $(*)$ 得出：写成 $m_1 \cos\theta_1 = M - m_2 \cos\theta_2$ 及 $m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2$，两式平方后相加：

$$m_1^2 = M^2 + m_2^2 - 2Mm_2 \cos\theta_2, \quad \text{所以} \quad \cos\theta_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2Mm_2},$$

再把两边的角色互换，得

$$\cos\theta_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2Mm_1}.$$

(a) 力三角形是一个真正的（非退化的）三角形，因为 $\theta_1 + \theta_2$ 严格介于 0° 与 180° 之间。因此三角不等式（triangle inequality）是严格的，由此得 $M < m_1 + m_2$。

至于下界，我们利用 θ_2 是锐角这一事实，即 $\cos\theta_2 > 0$。由于 $2Mm_2 > 0$，上面的公式给出

$$M^2 + m_2^2 - m_1^2 > 0 \iff M^2 > m_1^2 - m_2^2 \iff M > \sqrt{m_1^2 - m_2^2},$$

其中最后一步成立，是因为 $M > 0$ 且 $m_1^2 - m_2^2 > 0$。合起来，

$$\sqrt{m_1^2 - m_2^2} < M < m_1 + m_2.$$

? **想一想** 为甚么重要的是关于 θ_2 的条件，而不是关于 θ_1 的条件?

在三角形中，较长的边对着较大的角。由于 $m_1 > m_2$，角 θ_2（与 $m_1 g$ 相对）大于 θ_1（与 $m_2 g$ 相对）。所以只要 θ_2 是锐角，θ_1 自然也是锐角；真正起限制作用的只有 θ_2。（事实上，由于 $m_1 > m_2$，对任何 $M > 0$ 都有 $\cos\theta_1 > 0$。）

(b) 在直角三角形 QSP 和 RSP 中，$SP = h$，

$$QS = h\tan\theta_1, \qquad SR = h\tan\theta_2.$$

因此

$$r = \frac{QS}{SR} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cdot\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$$
$$= \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{M^2+m_2^2-m_1^2}{2Mm_2}\cdot\frac{2Mm_1}{M^2+m_1^2-m_2^2} \quad \text{（利用 } (*) \text{ 及上述余弦式）}$$
$$= \frac{M^2-m_1^2+m_2^2}{M^2-m_2^2+m_1^2},$$

这正是所求的比。由 (a) 部，分子分母两个式子均为正，所以 $r>0$；又因 $m_1>m_2$，故 $r<1$：点 S 较接近 Q，与图中所示一致。

第 (ii) 部分

对力三角形中的边 Mg 应用余弦定律，其对角为 $180^\circ-(\theta_1+\theta_2)$，得

$$M^2 = m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos(\theta_1+\theta_2).$$

（用代数方法：把 $(*)$ 中两条方程平方后相加。）由 $M^2=m_1^2+m_2^2$，必然有 $\cos(\theta_1+\theta_2)=0$。由于 θ_1 和 θ_2 均为锐角，$0^\circ<\theta_1+\theta_2<180^\circ$，唯一的可能是

$$\theta_1+\theta_2 = 90^\circ.$$

所以绳在 P 点成直角。（这个 M 值确实落在 (a) 部的范围内，因此这个构型是存在的。）

此时余弦式得以简化：$\cos\theta_1=\dfrac{2m_1^2}{2Mm_1}=\dfrac{m_1}{M}$ 及 $\cos\theta_2=\dfrac{m_2}{M}$。由于 $\theta_2=90^\circ-\theta_1$，得 $\sin\theta_1=\cos\theta_2=m_2/M$，所以

$$\tan\theta_1=\frac{m_2}{m_1}, \qquad \tan\theta_2=\frac{1}{\tan\theta_1}=\frac{m_1}{m_2}.$$

因此

$$\frac{QR}{SP}=\frac{h\tan\theta_1+h\tan\theta_2}{h}=\frac{m_2}{m_1}+\frac{m_1}{m_2}=\frac{m_1^2+m_2^2}{m_1m_2},$$

即 $QR:SP=(m_1^2+m_2^2):m_1m_2$。

验算

- 取 $m_1=5$、$m_2=3$、$M=6$（在 $4<M<8$ 之内），以数值方法解 $(*)$，得 $\theta_1\approx29.93^\circ$ 及 $\theta_2\approx56.25^\circ$。于是 $\tan\theta_1/\tan\theta_2\approx0.3846=\frac{5}{13}$，与 $r=\frac{36-25+9}{36-9+25}=\frac{20}{52}$ 吻合。
- 在范围的两端：当 $M\to\sqrt{m_1^2-m_2^2}$ 时，$\theta_2\to90^\circ$ 且 $r\to0$（绳 PR 变成水平）；当 $M\to m_1+m_2$ 时，两个角都趋向 0，而 P 会下沉至远低于 QR 的位置。
- 第 (ii) 部分取 $m_1=4$、$m_2=3$、$M=5$：$\tan\theta_1=\frac{3}{4}$，$\tan\theta_2=\frac{4}{3}$，且 $QR/SP=\frac{25}{12}$。验证 $(*)$：$4\cdot\frac{3}{5}=3\cdot\frac{4}{5}$ 及 $4\cdot\frac{4}{5}+3\cdot\frac{3}{5}=5$。

常见错误

- 误把力三角形中与 Mg 相对的角当作 $\theta_1 + \theta_2$，而不是 $180^\circ - (\theta_1 + \theta_2)$，结果令余弦定律中的正负号反转。
- 使用非严格的三角不等式，或忘记下界需要用到两个角均为锐角这个条件。
- 把比倒转：$r = QS/SR$，而 QS 是靠近较重质点的那一边。

STEP 之外

力三角形是一个一般事实的最简单情况：处于平衡的各力之和为零向量，所以把它们首尾相接画出来，会组成一个封闭多边形。工程师利用这个想法（即“力多边形”（force polygon））来分析桁架结构；而在大学一年级的力学中，它以静力学（statics）的向量形式再次出现，并配合力矩（moment）亦须平衡的条件。如欲深入了解，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。