详细解答

STEP II 2021，第 8 题

纯数学 · 积分递推关系

STEP II 2021，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 2.9 节逐步逼近 e 的分数中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/e-approximations.html

关键思路

函数 $t^n(1-t)^n$ 是单一个二次式 $u=t(1-t)$ 的幂，所以对它求导只不过是用两次链式法则（chain rule）。这个函数及其一阶导数（derivative）在 $t=0$ 和 $t=1$ 处都等于零，所以把它与 e^t 一起进行两次分部积分（integration by parts）时，所有边界项（boundary terms）都会消失，而第 (i) 部分的二阶导数就直接变成一条递推关系（recurrence）。这些积分被夹在 0 与一个极小的数之间，由此迫使分数 $-a_n/b_n$ 成为 e 的极佳近似。

解答

第 (i) 部分

设 $u=t(1-t)=t-t^2$，于是 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=1-2t$，$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=-2$，且

$$(1-2t)^2=1-4t+4t^2=1-4u.$$

设 $f(t) = t^n(1-t)^n = u^n$，由链式法则得 $f'(t) = nu^{n-1}(1-2t)$。再用乘积法则（product rule）求导一次（对 $n \geq 2$ 成立，此时 u^{n-2} 是多项式），

$$\begin{aligned} f''(t) &= n(n-1)u^{n-2}(1-2t)^2 - 2nu^{n-1} \\ &= nu^{n-2}\big[(n-1)(1-4u) - 2u\big] \\ &= nu^{n-2}\big[(n-1) - (4n-2)u\big] \\ &= nt^{n-2}(1-t)^{n-2}\big[(n-1) - 2(2n-1)t(1-t)\big], \end{aligned}$$

这正是所求的结果。

第 (ii) 部分

仍设 $f(t) = t^n(1-t)^n$，其中 $n \geq 2$，于是 $n!\,T_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$。进行两次分部积分，每次都对多项式求导、对 e^t 积分，

$$\int_0^1 f\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[f\,\mathrm{e}^t\Big]_0^1 - \Big[f'\,\mathrm{e}^t\Big]_0^1 + \int_0^1 f''\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

想一想 为甚么两个边界项都会消失?

因为 $f(t) = u^n$ 和 $f'(t) = nu^{n-1}(1-2t)$ 都含有因子 $u = t(1-t)$（这里用到 $n \geq 2$，故 $n-1 \geq 1$），而在 $t = 0$ 和 $t = 1$ 处都有 $u = 0$。所以

$$n!\,T_n = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

现在代入第 (i) 部分的结果，把它写成 $f'' = n(n-1)u^{n-2} - 2n(2n-1)u^{n-1}$：

$$\begin{aligned} n!\,T_n &= n(n-1)\int_0^1 u^{n-2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t - 2n(2n-1)\int_0^1 u^{n-1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= n(n-1)\,(n-2)!\,T_{n-2} - 2n(2n-1)\,(n-1)!\,T_{n-1} \\ &= n!\,T_{n-2} - 2(2n-1)\,n!\,T_{n-1}, \end{aligned}$$

这里用到 $\int_0^1 u^k\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = k!\,T_k$。两边除以 $n!$ 得

$$T_n = T_{n-2} - 2(2n-1)T_{n-1} \qquad (n \geq 2),$$

即为所求。

第 (iii) 部分

首先，$T_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 1$。

至于 $T_1 = \int_0^1 (t-t^2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$，可以通过求导验证 $\int t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t-1)\mathrm{e}^t$ 及 $\int t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t^2 - 2t + 2)\mathrm{e}^t$，所以

$$\int_0^1 (t-t^2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[(-t^2+3t-3)\mathrm{e}^t\Big]_0^1 = -\mathrm{e} + 3,$$

即 $T_1 = 3 - \mathrm{e}$。

因此 $T_0 = a_0 + b_0\mathrm{e}$，其中 $(a_0, b_0) = (-1, 1)$；$T_1 = a_1 + b_1\mathrm{e}$，其中 $(a_1, b_1) = (3, -1)$，全部都是整数。假设对某个 $n \geq 2$，T_{n-2} 和 T_{n-1} 都具有这种整数系数的形式。由第 (ii) 部分，

$$T_n = \big(a_{n-2} - 2(2n-1)a_{n-1}\big) + \big(b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1}\big)\mathrm{e},$$

由于 $2(2n-1)$ 是整数，两个括号内都是整数。由（强）归纳法（strong induction），每个 $n \geq 0$ 的 T_n 都可写成 $a_n + b_n\mathrm{e}$，其中 $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$。

第 (iv) 部分

上下界。当 $0 < t < 1$ 时，有 $0 < t(1-t) \leq \frac{1}{4} < 1$，所以 $0 < t^n(1-t)^n \leq 1$，而且 $0 < \mathrm{e}^t < \mathrm{e}$。因此在开区间 $(0, 1)$ 上

$$0 < \frac{t^n(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t < \frac{\mathrm{e}}{n!}.$$

被积函数（integrand）是连续的，所以把这些严格不等式在 $[0, 1]$（一个长度为 1 的区间）上积分后，不等式仍然是严格的：

$$0 < T_n < \frac{\mathrm{e}}{n!} \qquad (n \geq 0).$$

（当 $n = 0$ 时，左边的因子就是 1，严格性来自 $\mathrm{e}^t < \mathrm{e}$。）

极限。由于 $b_n \neq 0$，把 $T_n = a_n + b_n\mathrm{e}$ 除以 b_n：

$$-\frac{a_n}{b_n} - \mathrm{e} = -\frac{T_n}{b_n}, \qquad \text{所以} \qquad \left|-\frac{a_n}{b_n} - \mathrm{e}\right| = \frac{T_n}{|b_n|} \leq T_n < \frac{\mathrm{e}}{n!}.$$

这里用到 b_n 是非零整数，所以 $|b_n| \geq 1$。当 $n \to \infty$ 时，$\mathrm{e}/n! \to 0$，所以 $-a_n/b_n \to \mathrm{e}$。

事实上，这个界非常宽松。由递推关系得 $(a_2, b_2) = (-19, 7)$ 及 $(a_3, b_3) = (193, -71)$，给出近似值 $\frac{19}{7} \approx 2.714$ 和 $\frac{193}{71} \approx 2.71831$，而 $\mathrm{e} \approx 2.71828$。

验算

- 在第 (i) 部分代入 $n = 2$：$t^2(1-t)^2 = t^2 - 2t^3 + t^4$ 的二阶导数是 $2 - 12t + 12t^2$，而公式给出 $2\big[1 - 6t(1-t)\big] = 2 - 12t + 12t^2$。
- $T_1 = 3 - \mathrm{e} \approx 0.2817$ 是正数且小于 $\mathrm{e}/1!$，正如第 (iv) 部分所要求。接着 $T_2 = T_0 - 6T_1 = 7\mathrm{e} - 19 \approx 0.0280$；用电脑计算积分可确认这个值，并确认 n 直至 11 时递推关系和上下界都成立。
- 当 $n = 4, 5, 6$ 时，$-a_n/b_n$ 的值分别是 $\frac{2721}{1001}$、$\frac{49171}{18089}$、$\frac{1084483}{398959}$，与 e 分别相差约 10^{-7}、3×10^{-10} 和 5×10^{-13}：比单凭 $\mathrm{e}/n!$ 所预示的快得多。

常见错误

- 忘记说明边界项为何消失，或没有留意这需要 $n \geq 2$：当 $n = 1$ 时，导数 $1 - 2t$ 在两端都不为零。
- 在第 (iv) 部分只用了 $b_n \neq 0$，而没有用 $|b_n| \geq 1$。一个非零实数可以非常小；正是因为 b_n 是整数，T_n / b_n 才不会变得无限大。

STEP 之外

这正是埃尔米特（Hermite）在 1873 年证明 e 是无理数（irrational）、甚至是超越数（transcendental）的方法的核心：构造一些非零但趋向零的整数组合 $a_n + b_n \mathrm{e}$。若 $\mathrm{e} = p/q$，则 $q(a_n + b_n \mathrm{e}) = qa_n + b_n p$ 会是一个小于 $q\mathrm{e}/n!$ 的正整数，而当 n 足够大时这是不可能的；同样的多项式 $t^n(1-t)^n$ 亦出现在 Beukers 证明 $\zeta(3)$ 是无理数的著名证明中。若想进一步了解数能被分数逼近到甚么程度，可阅读 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。