详细解答

STEP II 2021，第 7 题

纯数学 · 旋转矩阵

STEP II 2021，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

关键思路

2×2 旋转矩阵（rotation matrix）的形状非常固定：它必定是 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，因此它的每一列都是单位向量（unit vector）。要求 $\mathbf{R}+\mathbf{I}$ 保持这个形状，就能把 ϕ 完全确定下来。对于一般满足 $\mathbf{S}^3=\mathbf{I}$ 的矩阵，有用的工具是行列式（determinant）（它具有乘性（multiplicative））以及关系式 $\mathbf{S}^2=(a+d)\mathbf{S}-\mathbf{I}$；后者让我们可以把 $\mathbf{S}$ 的任何幂写成 $\mathbf{S}$ 与 $\mathbf{I}$ 的组合。

解答

第 (i) 部分

记 $c=\cos\phi$ 及 $s=\sin\phi$，于是

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}c & -s\\ s & c\end{pmatrix},\qquad \mathbf{R}+\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1+c & -s\\ s & 1+c\end{pmatrix}.$$

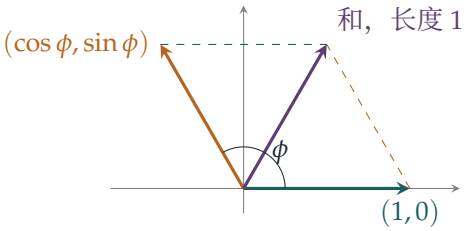
它本身已具有 $\begin{pmatrix}p & -q\\ q & p\end{pmatrix}$ 的形式，而这样的矩阵是旋转，当且仅当 $p^2+q^2=1$（此时对某个 θ 有 $(p,q)=(\cos\theta,\sin\theta)$）。因此我们需要

$$(1+c)^2+s^2=1 \iff 2+2c=1 \iff \cos\phi=-\tfrac{1}{2}.$$

在 $0^\circ\le\phi<360^\circ$ 的范围内，得 $\phi=120^\circ$ 或 $\phi=240^\circ$。

从几何角度看，$\mathbf{R}+\mathbf{I}$ 的第一列是单位向量 $(1,0)$ 与 $(\cos\phi,\sin\phi)$ 之和，而我们要求这个和也是单位向量：三个向量构成一个等边三角形（equilateral triangle），如下图（$\phi=120^\circ$）

所示。



无论哪种情况，$\mathbf{R}^3$ 都是转过 3ϕ 的旋转，即 360° 或 720°，是整数圈。因此 $\mathbf{R}^3 = \mathbf{I}$。

第 (ii) 部分

行列式。由于 det 具有乘性，$(\det \mathbf{S})^3 = \det(\mathbf{S}^3) = \det \mathbf{I} = 1$。矩阵是实矩阵，所以 $\det \mathbf{S}$ 是一个立方等于 1 的实数，而这样的实数只有 1。故 $\det \mathbf{S} = ad - bc = 1$。

二次关系式。展开得

$$\mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}, \qquad (a+d)\mathbf{S} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} a^2 + ad - 1 & ab + bd \\ ac + dc & ad + d^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

非对角元素（off-diagonal entries）相同，而对角元素亦相同，因为 $bc = ad - 1$（即 $\det \mathbf{S} = 1$）。因此 $\mathbf{S}^2 = (a+d)\mathbf{S} - \mathbf{I}$，得证。

迹。设 $t = a + d$（即迹（trace））。把关系式乘以 $\mathbf{S}$，再用一次该关系式：

$$\mathbf{S}^3 = t\mathbf{S}^2 - \mathbf{S} = t(t\mathbf{S} - \mathbf{I}) - \mathbf{S} = (t^2 - 1)\mathbf{S} - t\mathbf{I}.$$

令 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$，得

$$(t^2 - 1)\mathbf{S} = (t+1)\mathbf{I}.$$

? **想一想** 我们可以直接除以 $t^2 - 1$ 就完事吗?

不可以掉以轻心：我们必须另外考虑 $t^2 - 1 = 0$ 的情况，而事实上正正就是这个情况会出现。

- 若 $t^2 \neq 1$，则 $\mathbf{S} = \dfrac{t+1}{t^2-1}\mathbf{I} = k\mathbf{I}$，其中 k 为实数。于是 $\mathbf{S}^3 = k^3\mathbf{I} = \mathbf{I}$ 迫使 $k^3 = 1$，所以 $k = 1$ 而 $\mathbf{S} = \mathbf{I}$，但这已被排除。
- 所以 $t^2 = 1$。方程变为 $\mathbf{0} = (t+1)\mathbf{I}$，故 $t = -1$（若 $t = 1$ 则会得出 $2\mathbf{I} = \mathbf{0}$，这是错的）。

因此 $a + d = -1$。

第 (iii) 部分

首先，$\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$：否则 $\mathbf{S}+\mathbf{I} = 2\mathbf{I}$，其行列式为 4，而且会把长度加倍，所以不是旋转。因此第 (ii) 部分适用，得 $a+d=-1$。

由于 $\mathbf{S}+\mathbf{I}$ 是旋转，设其转角为 θ，则

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix}.$$

迹的条件给出 $2\cos\theta - 2 = -1$，所以 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 及 $\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$。于是

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

它具有旋转的形式，且 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$。所以 $\mathbf{S}$ 是旋转，其余弦为 $-\frac{1}{2}$，正弦为 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$。

转角是 120°（当 $\theta = 60^\circ$）或 240°（当 $\theta = 300^\circ$）。两者确实都会出现：由第 (i) 部分，这两个旋转都使 $\mathbf{S}+\mathbf{I}$ 为旋转，且 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$。（等价地，一旦知道 $\mathbf{S}$ 是旋转，第 (i) 部分本身已列出所有可能的转角。）

验算

- 当 $\phi = 120^\circ$，$\mathbf{R}+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，即转过 60° 的旋转；当 $\phi = 240^\circ$，它是转过 300° 的旋转。
- 矩阵 $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 满足 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$（乘出来便知），但不是旋转；它仍然有行列式 1 和迹 -1，与第 (ii) 部分的预测一致。它的 $\mathbf{S}+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 不是旋转，与第 (iii) 部分相符。
- 用电脑检查了大量满足 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$、$\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$ 的随机实矩阵，每次都确认行列式为 1、迹为 -1，且 $\mathbf{S}^2$ 的关系式成立；在第 (iii) 部分扫描 θ，只找到 $\theta = 60^\circ, 300^\circ$。

常见错误

- 除以 $t^2 - 1$ 而没有检查它会否为零；$t^2 = 1$ 的情况恰恰就是答案。
- 忘记在第 (iii) 部分中，必须先确立 $\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$，才可以使用第 (ii) 部分。

- 以为 $\det(\mathbf{S}+\mathbf{I}) = 1$ 就足以令 $\mathbf{S}+\mathbf{I}$ 成为旋转；在这里它是自动成立的，所以不提供任何信息。

STEP 之外

关系式 $\mathbf{S}^2 = (a+d)\mathbf{S} - (\det \mathbf{S})\mathbf{I}$ 是凯莱－哈密顿定理（Cayley–Hamilton theorem）在 2×2 情况下的特例：每个方阵都满足它自己的特征多项式（characteristic polynomial）。第 (ii) 部分说明，一个阶为 3 的 2×2 实矩阵，其特征值（eigenvalue）是两个非实数的三次单位根（cube roots of unity），而这样的矩阵必定相似（similar）于转过 120° 的旋转，但不一定等于它。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）对特征值和相似性有深入的发展。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。