详细解答

# STEP II 2021，第 6 题

纯数学 · 圆几何的近似

> **STEP II 2021，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

## 关键思路

一切都发生在同一个三角形之中：$A$、道路的圆心 $O$，以及骑车者所走圆弧的圆心 $O'$。由对称性可知，$O'$ 位于经过 $O$ 并平分 $\angle AOB$ 的直线上，而相切（tangency）的条件则确定了距离 $OO'$。在这个三角形中运用余弦定理（cosine rule）和正弦定理（sine rule），便可得出 $d$ 和 $\alpha - \theta$。至于最后一部分，远小于 1 的意思是我们只保留 $w/R$ 的一阶（first-order）项，并使用小角近似（small-angle approximation）。

## 解答

以 $O$ 为原点，并使对称轴成铅直方向，于是 $A = (-(R+w)\sin\alpha,\ (R+w)\cos\alpha)$，而 $B$ 是它的镜像。道路就是区域 $R \le r \le R+w$，其中 $r$ 是与 $O$ 的距离。

### 第 (i) 部分

弦（chord）$AB$ 上最接近 $O$ 的点是它的中点 $M$，因为 $OM \perp AB$（三角形 $OAB$ 是等腰（isosceles）三角形）。于是

$$OM = (R+w)\cos\alpha \le \tfrac{1}{2}(R+w) < \tfrac{1}{2}(R+R) = R,$$

这里先用了 $\cos\alpha \le \frac{1}{2}$（因为 $\frac{1}{3}\pi \le \alpha \le \frac{1}{2}\pi$），再用了 $w < R$。所以 $M$ 严格位于内圆之内，即不在道路上。任何由 $A$ 直线骑到 $B$ 的路线都会经过 $M$，因此不可能一直留在道路上。

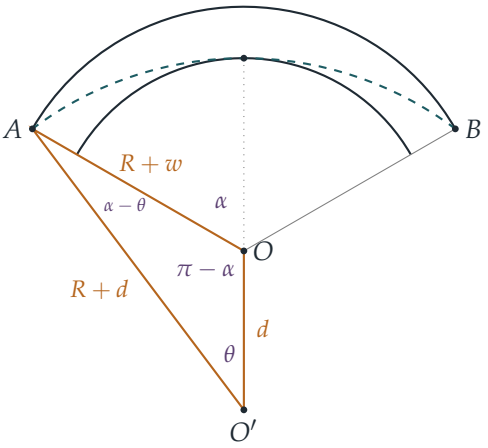
### 第 (ii) 部分

**$O'$ 在哪里？** 该圆经过 $A$ 和 $B$，所以其圆心与两点等距，位于 $AB$ 的垂直平分线（perpendicular bisector）上，也就是经过 $O$ 的对称轴。它与内圆相切，而且比内圆大（$R + d > R$），

所以内圆位于它之内，与它内切（internally tangent）。对于内切的两个圆，圆心之间的距离等于半径之差：

$$OO' = (R + d) - R = d.$$

路线向外、即朝道路的方向凸出，所以 $O'$ 位于 $O$ 背向道路的一侧，如图所示。于是在三角形 $AOO'$ 中，有 $OA = R + w$、$OO' = d$、$O'A = R + d$，而在 $O$ 的角是 $\pi - \alpha$（它与 $\angle AOM = \alpha$ 互补（supplementary））。在 $O'$ 的角是 $\frac{1}{2}\angle AO'B = \theta$，所以在 $A$ 的角是 $\pi - (\pi - \alpha) - \theta = \alpha - \theta$。




**(a)** 在三角形 $AOO'$ 中运用余弦定理，并利用 $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$，得

$$\begin{aligned}(R + d)^2 &= (R + w)^2 + d^2 + 2(R + w)d\cos\alpha \\ R^2 + 2Rd &= R^2 + 2Rw + w^2 + 2(R + w)d\cos\alpha \\ 2d\big(R - (R + w)\cos\alpha\big) &= w(2R + w),\end{aligned}$$

所以

$$d = \frac{w(2R + w)}{2\big(R - (R + w)\cos\alpha\big)}.$$

由第 (i) 部分可知分母中的括号是正数，所以这是一个合理的正长度。

**(b)** 在同一个三角形中运用正弦定理，把角 $\alpha - \theta$（对边为 $OO' = d$）与角 $\pi - \alpha$（对边为 $O'A = R + d$）配对，得

$$\frac{\sin(\alpha - \theta)}{d} = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{R + d} \quad \Longrightarrow \quad \sin(\alpha - \theta) = \frac{d\sin\alpha}{R + d}.$$

**第 (iii) 部分**

记 $\varepsilon = w/R$，于是 $0 < \varepsilon \ll 1$。把 (a) 的结果除以 $R$，

$$\frac{d}{R} = \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2\big(1-(1+\varepsilon)\cos\alpha\big)}.$$

由于 $\cos\alpha \le \frac{1}{2}$，分母至少是 $2\big(1-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\big) = 1-\varepsilon$，所以

$$0 < \frac{d}{R} \le \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{1-\varepsilon} \approx 2\varepsilon,$$

这远小于 1。（准确至一阶，$d/R \approx \varepsilon/(1-\cos\alpha)$。）

? **想一想** 正弦值很小，只告诉我们该角接近 0 或接近 $\pi$。究竟是哪一个?

由 (b)，$0 < \sin(\alpha-\theta) = \dfrac{(d/R)\sin\alpha}{1+d/R} < \dfrac{d}{R}$，这是很小的。角 $\alpha-\theta$ 是三角形 $AOO'$ 的一个内角，所以是正数；又因为 $\theta > 0$，它小于 $\alpha \le \frac{1}{2}\pi$。在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上，正弦函数是递增的，且 $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$，所以 $\alpha-\theta \le \frac{\pi}{2}\sin(\alpha-\theta) < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{d}{R}$，这同样远小于 1。

**第 (iv) 部分**

我的朋友沿外边缘骑行，那是一段半径为 $R+w$、在 $O$ 所对的角为 $2\alpha$ 的圆弧，所以他们的路线长度是 $L = 2\alpha(R+w)$。我的路线是半径为 $R+d$ 的圆弧，位于 $AB$ 背向 $O'$ 的一侧；它在 $O'$ 所对的角为 $2\theta$，所以长度是 $2\theta(R+d)$。因此

$$\begin{aligned} S &= 2\alpha(R+w) - 2\theta(R+d) \\ &= 2(R+d)(\alpha-\theta) + 2\alpha(R+w) - 2\alpha(R+d) \\ &= 2(R+d)(\alpha-\theta) + 2\alpha(w-d), \end{aligned}$$

正是所求（我们加上又减去了 $2\alpha(R+d)$）。

**近似**。现在我们准确至 $\varepsilon$ 的一阶，忽略相对于所保留各项而言为 $\varepsilon^2$ 阶的项。由 (iii)，$\alpha-\theta$ 很小，所以 $\alpha-\theta \approx \sin(\alpha-\theta)$，误差为 $(\alpha-\theta)^3$ 阶。由 (b)，

$$2(R+d)(\alpha-\theta) \approx 2(R+d)\cdot\frac{d\sin\alpha}{R+d} = 2d\sin\alpha.$$

因此

$$S \approx 2d\sin\alpha + 2\alpha w - 2\alpha d = 2\alpha w - 2d(\alpha-\sin\alpha).$$

现在利用 (iii) 中的 $d \approx \dfrac{w}{1-\cos\alpha}$:

$$S \approx 2w\left(\alpha - \frac{\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right) = 2w\cdot\frac{\alpha-\alpha\cos\alpha-\alpha+\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{2w(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}.$$

最后，$L = 2\alpha R(1+\varepsilon) \approx 2\alpha R$；由于 $S$ 本身已经是 $\varepsilon$ 的一阶量，把 $L$ 换成 $2\alpha R$ 只会在二阶上改变 $S/L$。所以

$$\frac{S}{L} \approx \left(\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha(1-\cos\alpha)}\right)\frac{w}{R},$$

这就是所求的比例。

## 验算

- 当 $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ 时，该比例是 $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{w}{R} \approx 0.637\,\frac{w}{R}$；当 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ 时，约为 $0.654\,\frac{w}{R}$。两者都是正数，这是必然的，因为 $\tan\alpha > \alpha$ 给出 $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha$。
- 取 $R = 1$、$w = 0.01$、$\alpha = \frac{1}{2}\pi$：精确公式给出 $d \approx 0.01005$、$\alpha - \theta \approx 0.00995$ 及 $S/L \approx 0.006285$，而近似值是 $0.006366$。相对误差约为 1%，属于 $w/R$ 的量级，理应如此；当 $w$ 除以十时，误差亦缩小至十分之一。
- 一项电脑验算把 $A$ 和 $B$ 放在坐标上，直接求出相切的圆，并以数千组随机选取的 $R$、$w$ 和 $\alpha$ 证实了 $d$、$\sin(\alpha-\theta)$ 和 $S$ 的公式。

## 常见错误

- 把距离取为 $OO' = R + d + R$ 或 $OO' = w$：两圆是内切，所以圆心之间的距离是半径之差，即 $d$。
- 在三角形 $AOO'$ 中，对于在 $O$ 的角错用了 $\cos\alpha$ 而不是 $\cos(\pi-\alpha)$，这会令最后一项的正负号倒转。
- 在 (iii) 中只说 $\sin(\alpha-\theta)$ 很小：你还需要 $\alpha-\theta$ 位于 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 内，才可以断定角本身很小。

## STEP 之外

“远小于 1”是微扰理论（perturbation theory）的语言：以一个小参数 $\varepsilon$ 展开，保留首项，并确保误差确实是更高阶的。在大学里，这会借助泰勒定理（Taylor's theorem）和大 $O$ 记号（big-$O$ notation）严格化；在本题中，它会显示 $S/L$ 等于所给比例乘以 $\varepsilon$，再加上一个 $\varepsilon^2$ 阶的项。关于带余项的泰勒定理的严谨论述，可参看 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；如想做更多同类风格的题目，可参看 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学题集》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。