详细解答

STEP II 2021，第 5 题

纯数学 · 一阶微分方程

STEP II 2021，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

关键思路

第 (i) 部分是一条一阶（first-order）微分方程，它既不是可分离变量（separable）的，也不是一眼就能看出、形式友善的线性（linear）方程；但题目建议的代换（substitution）能把它化为可以直接积分的方程。第 (ii) 部分看似是几何题，可是一旦写出切线（tangent）方程，并要求它通过 $(1, t)$，得到的正是第 (i) 部分中 $a = 1$ 的方程。之后的草图可由导数（derivative）得出，而导数原来出奇地简单。

解答

第 (i) 部分

方程只在 $x \neq a$ 时才有意义，所以我们在 $x > a$ 或 $x < a$ 的某个区间上处理。设 $y = (x-a)u$，由乘积法则（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + (x-a)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

代入方程，

$$(x-a)u + (x-a)^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (x-a)u - x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{(x-a)^2}.$$

含 u 的项互相抵消，这正是这个代换的用意所在。把 x 写成 $x = (x-a) + a$，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x-a} - \frac{a}{(x-a)^2}, \qquad \text{故} \qquad u = -\ln|x-a| + \frac{a}{x-a} + c$$

其中 c 为常数。两边乘以 $x-a$，

$$\boxed{y = a + (x-a)(c - \ln|x-a|)}$$

其中常数 c 在 $x = a$ 两侧可以不同。

验证：$y' = c - \ln|x-a| - 1$，所以 $(x-a)y' = (y-a) - (x-a) = y - x$，符合要求。

第 (ii) 部分

在 $(t, \mathrm{f}(t))$ 处的切线为 $y = \mathrm{f}(t) + \mathrm{f}'(t)(x-t)$。它通过 $(1, t)$ 当且仅当

$$t = \mathrm{f}(t) + \mathrm{f}'(t)(1-t), \qquad \text{即} \qquad (t-1)\,\mathrm{f}'(t) = \mathrm{f}(t) - t.$$

把 t 改记为 x，这就是第 (i) 部分中 $a = 1$ 的方程，在 $x \neq 1$ 时成立。因此在 $x < 1$ 和 $x > 1$ 上分别有

$$\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)(c - \ln|x-1|),$$

而常数须在两侧各自确定。

> ? **想一想** 为甚么单凭一个条件，例如 $\mathrm{f}(0) = 0$，不能确定整条曲线在所有 x 上的形状?

方程在 $x = 1$ 处不提供任何信息，所以 $x < 1$ 上的解与 $x > 1$ 上的解互不相关。这就是题目为每一小题分别给出条件的原因。

(a) 当 $x < 1$ 时，$|x-1| = 1 - x$。由条件 $\mathrm{f}(0) = 0$ 得 $0 = 1 + (-1)(c - \ln 1) = 1 - c$，故 $c = 1$，且

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)(1 - \ln(1-x)) \quad (x < 1).}$$

求导，$\mathrm{f}'(x) = 1 - \ln(1-x) + (x-1)\cdot\dfrac{1}{1-x} = -\ln(1-x)$。因此：

- 只有当 $1 - x = 1$ 时 $\mathrm{f}'(x) = 0$，所以唯一的驻点（stationary point）是 $(0,0)$。由于当 $x < 1$ 时 $\mathrm{f}''(x) = \dfrac{1}{1-x} > 0$，曲线是凸（convex）的，而 $(0,0)$ 是极小值（minimum）点。所以 $\mathrm{f}(x) \geq 0$，曲线在原点恰好与 x 轴相切。
- 当 $x \to 1^-$ 时，设 $z = x - 1 \to 0$：利用 $z\ln|z| \to 0$，得 $\mathrm{f}(x) = 1 + z - z\ln|z| \to 1$。斜率（gradient）$-\ln(1-x) \to +\infty$，所以曲线趋向 $(1,1)$，并在该处变为铅垂。
- 当 $x \to -\infty$ 时，$x - 1$ 和 $1 - \ln(1-x)$ 都是绝对值很大的负数，所以 $\mathrm{f}(x) \to +\infty$。

一些有用的点：$\mathrm{f}(1-\mathrm{e}) = 1$ 及 $\mathrm{f}(-1) = 2\ln 2 - 1 \approx 0.39$。

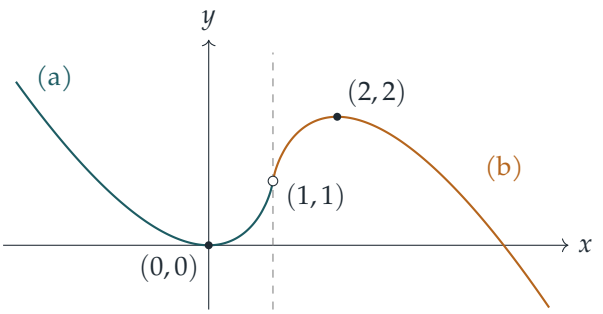
(b) 当 $x > 1$ 时，$|x-1| = x - 1$。由条件 $\mathrm{f}(2) = 2$ 得 $2 = 1 + 1\cdot(c - 0)$，所以同样有 $c = 1$，且

$$\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)\big(1 - \ln(x-1)\big) \quad (x > 1), \qquad \mathrm{f}'(x) = -\ln(x-1).$$

- 唯一的驻点在 $x = 2$，即 $(2, 2)$。这里 $\mathrm{f}''(x) = -\dfrac{1}{x-1} < 0$，所以曲线是凹（concave）的，而 $(2, 2)$ 是极大值（maximum）点。
- 当 $x \to 1^+$ 时，（由同一极限）$\mathrm{f}(x) \to 1$，且 $\mathrm{f}'(x) \to +\infty$：曲线以铅垂方向离开 $(1, 1)$。
- 当 $x \to \infty$ 时，$1 - \ln(x-1) \to -\infty$，所以 $\mathrm{f}(x) \to -\infty$。曲线通过 $(1 + \mathrm{e}, 1)$，并在 $x \approx 4.59$ 附近与 x 轴相交一次。

想一想 做完 (a) 之后，有没有更快捷的方法看出 (b) 的形状?

有。设 $s = |x - 1|$，则 (a) 中的分支为 $\mathrm{f}(1 - s) = 1 - s(1 - \ln s)$，而 (b) 中的分支为 $\mathrm{f}(1 + s) = 1 + s(1 - \ln s)$。所以 $\mathrm{f}(1 + s) - 1 = -\big(\mathrm{f}(1 - s) - 1\big)$：(b) 的分支就是 (a) 的分支绕 $(1, 1)$ 旋转半周所得。极小值点 $(0, 0)$ 被映射到极大值点 $(2, 2)$。



曲线在 $x = 1$ 处没有定义（空心圆点），但两条分支都以铅垂切线趋近 $(1, 1)$。

验算

- 直接检验切线性质。在 $t = 0$ 处，切线是水平的 $y = 0$，它确实通过 $(1, 0)$。在 $t = 2$ 处，切线是 $y = 2$，它通过 $(1, 2)$。
- 在 $t = -1$ 处：$\mathrm{f}(-1) \approx 0.386$，$\mathrm{f}'(-1) = -\ln 2 \approx -0.693$。切线在 $x = 1$ 处的高度为 $0.386 + 2(-0.693) \approx -1.000$，等于 t。
- 对称性验算：对每个 $s > 0$ 都有 $\mathrm{f}(1 + s) + \mathrm{f}(1 - s) = 2$，例如 $\mathrm{f}(4) + \mathrm{f}(-2) = (4 - 3\ln 3) + (3\ln 3 - 2) = 2$。

常见错误

- 忘记在 $\ln|x - a|$ 中加上绝对值（modulus），以致在第 (a) 部分无法处理 $x < 1$ 的情况。

- 以为 (a) 中求得的常数自动适用于 $x > 1$。这里碰巧得出相同的值，但必须用 $f(2) = 2$ 加以验证。
- 断定当 $x \to 1$ 时 $f(x) \to 0$ 或趋于无穷。$(x-1)\ln|x-1|$ 这一项趋向 0，所以 $f \to 1$。趋于无穷的是斜率。

STEP 之外

把原点移到 $x = a$、$y = a$ 之后，方程 $(x-a)y' = y - x$ 就是齐次（homogeneous）方程：设 $X = x - a$ 及 $Y = y - a$，方程变为 $XY' = Y - X$。代换 $Y = Xu$ 正是解齐次方程的标准方法。使 y' 的系数为零的点 $x = a$ 是一个奇点（singular point），而奇点两侧的解之间可以毫无关系。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）对这两个概念都有论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。