详细解答

# STEP II 2021，第 4 题

纯数学 • Lambert W 函数

**STEP II 2021，第 4 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 3.9 节创造一个新函数中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/lambert-w.html

## 关键思路

函数 $g$ 是 $xe^x$ 的逆运算，所以整道题的重点就是把每条方程重新整理成 $ue^u = c$ 的形式，其中 $u$ 是某个新变量。一旦化成这个形式，第 (i) 部分的草图就告诉我们一切：若 $c < -\frac{1}{e}$，则无解；若 $-\frac{1}{e} < c < 0$，则有两个解，而 $g$ 永远只会选出满足 $u \geq -1$ 的那一个。至于对数（logarithm），则以代换 $x = e^u$ 处理。

## 解答

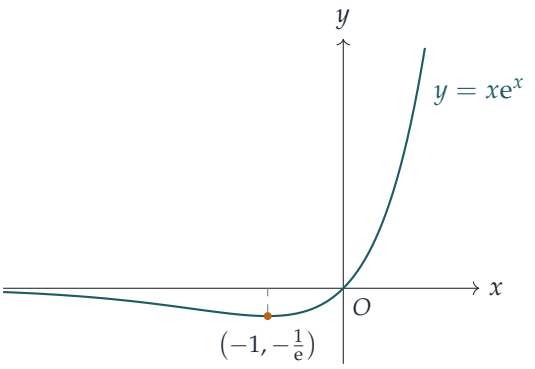
### 第 (i) 部分

设 $y = xe^x$。由乘积法则（product rule），

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x)e^x,$$

由于 $e^x > 0$，这个导数（derivative）只在 $x = -1$ 处为零。当 $x < -1$ 时斜率（gradient）为负，当 $x > -1$ 时斜率为正，所以唯一的驻点（stationary point）是位于 $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ 的极小点（minimum）。

曲线的正负号与 $x$ 相同，并且通过原点。当 $x \to \infty$ 时，$y \to \infty$，而且增长得很快。当 $x \to -\infty$ 时，$e^x$ 压倒 $x$，所以 $y \to 0$，并从下方趋近：负 $x$ 轴是一条渐近线（asymptote）。



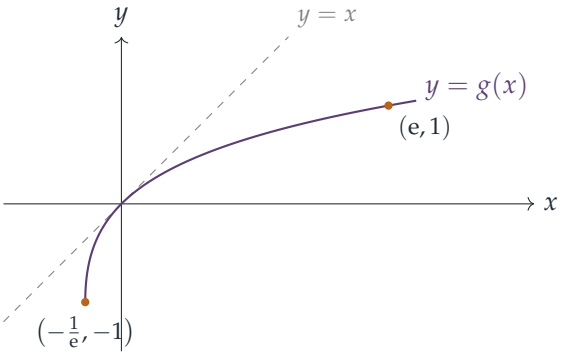

**第 (ii) 部分**

要 $f$ 有反函数（inverse function），它在 $[a,\infty)$ 上必须是一一对应（one-to-one）的。若 $a<-1$，区间包含了 $x=-1$ 附近极小点两侧的点；由于 $f$ 是连续的，并在 $(-\infty,-1]$ 上严格递减、在 $[-1,\infty)$ 上严格递增（strictly increasing），某个略大于 $-\frac{1}{\mathrm{e}}$ 的值会被取到两次。若 $a\geq -1$，则 $f$ 严格递增，因此是一一对应的。所以最小的可能值是

$$a=-1.$$

这时 $f$ 把 $[-1,\infty)$ 映射到 $[-\frac{1}{\mathrm{e}},\infty)$ 上，所以 $g$ 的定义域（domain）是 $[-\frac{1}{\mathrm{e}},\infty)$，值域（range）是 $[-1,\infty)$。

$g$ 的图像是第 (i) 部分右边那一支沿直线 $y=x$ 的反射。它从 $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},-1\right)$ 开始，在该处有一条铅垂切线（vertical tangent）（即极小点处水平切线的反射），然后通过原点，在原点的斜率是 1（因为 $f'(0)=1$），之后递增得越来越慢：$g(\mathrm{e})=1$，而当 $x$ 很大时，$g(x)$ 比 $\ln x$ 增长得更慢。




第 (iii) 部分会反复用到两个事实。对于 $c\geq -\frac{1}{\mathrm{e}}$，$u=g(c)$ 是方程 $u\mathrm{e}^u=c$ 满足 $u\geq -1$ 的那个解。另外，由第 (i) 部分的草图可知，方程 $u\mathrm{e}^u=c$

- 若 $c<-\frac{1}{\mathrm{e}}$，则没有实数解；

- 若 $-\frac{1}{\mathrm{e}} < c < 0$，则有两个实数解，分别是 $g(c) \in (-1, 0)$ 和另一个小于 $-1$ 的解；
- 若 $c \geq 0$，则恰有一个实数解 $g(c)$（因为当 $u < 0$ 时，左边是负数）。

**第 (iii) 部分**

**(a)** 两边乘以 $\mathrm{e}^x$（它永不为零），得

$$x\mathrm{e}^x = \tfrac{1}{5}.$$

由于 $\frac{1}{5} > 0$，恰有一个实根：

$$x = g\left(\tfrac{1}{5}\right).$$

**(b)** 要 $\ln x$ 有定义，须有 $x > 0$，所以设 $x = \mathrm{e}^u$，其中 $u = \ln x$ 为实数。方程变成

$$2u\mathrm{e}^u + 1 = 0 \iff u\mathrm{e}^u = -\tfrac{1}{2}.$$

但对所有 $u$ 都有 $u\mathrm{e}^u \geq -\frac{1}{\mathrm{e}}$，而由于 $\mathrm{e} > 2$，所以 $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{\mathrm{e}}$。因此没有实根。

**(c)** 同样设 $x = \mathrm{e}^u$，

$$3u\mathrm{e}^u + 1 = 0 \iff u\mathrm{e}^u = -\tfrac{1}{3}.$$

由于 $\mathrm{e} < 3$，所以 $-\frac{1}{\mathrm{e}} < -\frac{1}{3} < 0$，因此 $u$ 有两个值，从而（因为 $u \mapsto \mathrm{e}^u$ 是一一对应的）$x$ 有两个实根。其中一个是

$$x = \mathrm{e}^{g(-1/3)}.$$

**想一想** 这是较大的根还是较小的根?

$u$ 的另一个值小于 $-1$，而 $g(-\frac{1}{3}) > -1$。由于 $\mathrm{e}^u$ 随 $u$ 递增，根 $\mathrm{e}^{g(-1/3)}$ 是两个根中较大的一个。

**(d)** 同样有 $x > 0$。取指数，$x = 3\ln x \iff \mathrm{e}^{x/3} = x \iff x\mathrm{e}^{-x/3} = 1$。要得到 $u\mathrm{e}^u$ 的形式，前面的乘数必须与指数相配，所以设 $u = -\frac{x}{3}$，并两边乘以 $-\frac{1}{3}$：

$$\left(-\frac{x}{3}\right)\mathrm{e}^{-x/3} = -\frac{1}{3}.$$

与 (c) 一样，$-\frac{1}{\mathrm{e}} < -\frac{1}{3} < 0$，所以 $u$ 有两个值，两者都是负数，从而得到两个正根 $x = -3u$。其中一个根是

$$x = -3\,g\left(-\tfrac{1}{3}\right).$$

这次映射 $u \mapsto x = -3u$ 是递减的。$u$ 的另一个值小于 $-1$，所以另一个根大于 3，而我们求得的根满足 $x = -3g(-\frac{1}{3}) < 3$。因此我们求得的根是两者中较小的一个。

**第 (iv) 部分**

由于 $x > 0$，取对数：$x^x = 10 \iff x \ln x = \ln 10$。设 $x = \mathrm{e}^u$：

$$u\mathrm{e}^u = \ln 10.$$

由于 $\ln 10 > 0$，这方程只有一个解 $u = g(\ln 10)$，所以根是

$$x = \mathrm{e}^{g(\ln 10)}.$$

（等价地，由于当 $c \neq 0$ 时 $\mathrm{e}^{g(c)} = c/g(c)$，根也可写成 $\dfrac{\ln 10}{g(\ln 10)}$。）

## 验算

- 数值上，$g(-\frac{1}{3}) \approx -0.6191$。在 (c) 中，这给出 $x \approx 0.5384$，而 $3(0.5384)\ln(0.5384) \approx -1.000$；另一个根约为 0.2204，确实较小。
- 在 (d) 中，$x \approx 1.8572$，而 $3\ln 1.8572 \approx 1.8572$；另一个根约为 $4.536 > 3$，与预测相符。
- 在 (iv) 中，$g(\ln 10) \approx 0.9188$，所以 $x \approx 2.5062$，而 $2.5062^{2.5062} \approx 10.00$。
- 在 (b) 中，$2x \ln x + 1$ 的最小值是 $1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0.264 > 0$（在 $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ 处取得），证实没有根。

## 常见错误

- 在第 (ii) 部分取 $a = 0$, 因为曲线在那里“看起来”是一一对应的: 其实转向点（turning point）在 $x = -1$，而不在原点。
- 在 (d) 中忘记整条式乘以 $-\frac{1}{3}$，以致前面的因子与指数不相配，无法应用 $g$。
- 以为经 $g$ 求得的根总是较大的那个：在 (c) 中确是如此，因为 $x = \mathrm{e}^u$ 随 $u$ 递增；但在 (d) 中并非如此，因为 $x = -3u$ 把次序倒转了。

## STEP 之外

函数 $g$ 是 *Lambert W 函数*（Lambert W function）的主支（principal branch），通常记作 $W_0$；当 $-\frac{1}{\mathrm{e}} < c < 0$ 时，$u\mathrm{e}^u = c$ 的另一个解来自第二个分支 $W_{-1}$。凡是未知数同时出现在指数函数之内和之外的地方，它都会出现：例如延迟微分方程（delay differential equations）、组合数学（combinatorics）（计算标号树（labelled trees）的数目）以及物理学。把反函数延拓越过它不再一一对应的那一点，正是复分析（complex analysis）中

分支与分支点（branch points）理论的起点；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）是初次接触这些概念的绝佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。