详细解答

STEP II 2021，第 3 题

纯数学 · 整数部分与小数部分

STEP II 2021，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

关键思路

每个实数都可以唯一地分拆成一个整数部分（integer part）和一个位于 $[0,1)$ 的小数部分（fractional part）。所以当一条方程说“一个整数加上一个 $[0,1)$ 中的数等于 4.9”时，两部分都被确定了：整数必定是 4，小数部分必定是 0.9。在 (ii) 和 (iii) 中，各方程互相纠缠，但把三条方程相加，就能让每个 $\lfloor t\rfloor + \{t\}$ 重新组合成 t。这样便得到一条简洁的线性方程（linear equation），再从它减去每条原方程，就能把未知数分离成正好是“整数加小数部分”的形式。

解答

以下一直会用到：若 n 是整数，$0 \le f < 1$ 且 $n + f = c$，则 $n = \lfloor c\rfloor$ 及 $f = \{c\}$。这是因为 $n \le c < n+1$，从而 n 被确定为不超过 c 的最大整数。

第 (i) 部分

在第一条方程中，$\lfloor x\rfloor$ 是整数而 $0 \le \{y\} < 1$，所以

$$\lfloor x\rfloor = 4, \qquad \{y\} = 0.9.$$

在第二条方程中，$\lfloor y\rfloor$ 是整数而 $0 \le \{x\} < 1$，所以 $\lfloor y\rfloor = \lfloor -1.4\rfloor = -2$ 及 $\{x\} = -1.4 - (-2) = 0.6$。因此

$$x = 4 + 0.6 = 4.6, \qquad y = -2 + 0.9 = -1.1.$$

它们满足两条方程（$4 + 0.9 = 4.9$ 及 $0.6 - 2 = -1.4$），而我们已证明这是唯一的解。

第 (ii) 部分

把三条方程相加。x、y、z 各自单独出现一次，另外又以 $\lfloor\cdot\rfloor+\{\cdot\}$ 的形式分拆在两条不同的方程中出现一次：

$$(x+y+z)+(\{x\}+\lfloor x\rfloor)+(\lfloor y\rfloor+\{y\})+(\{z\}+\lfloor z\rfloor)=3.9+5.3+5,$$

即 $2(x+y+z)=14.2$，所以

$$x+y+z=7.1.$$

想一想 既然已知 $x+y+z$，从中减去其中一条原方程后，还剩下甚么？

从 $x+y+z=7.1$ 减去第一条方程，x 被消去，剩下 $y-\lfloor y\rfloor$ 和 $z-\{z\}$：

$$\{y\}+\lfloor z\rfloor=7.1-3.9=3.2,$$

这正是所求的结果。同样地，减去第二和第三条方程，得

$$\lfloor x\rfloor+\{z\}=7.1-5.3=1.8,\qquad \{x\}+\lfloor y\rfloor=7.1-5=2.1.$$

每条都是“整数加小数部分”的形式，所以

$$\begin{aligned}\lfloor z\rfloor&=3, & \{y\}&=0.2,\\ \lfloor x\rfloor&=1, & \{z\}&=0.8,\\ \lfloor y\rfloor&=2, & \{x\}&=0.1.\end{aligned}$$

因此 $x=1.1$、$y=2.2$、$z=3.8$。这是唯一可能的解，而且确实成立：

$$1.1+2+0.8=3.9,\qquad 0.1+2.2+3=5.3,\qquad 1+0.2+3.8=5.$$

第 (iii) 部分

同样的技巧依然奏效。把三条方程相加，并利用 $2\lfloor y\rfloor+2\{y\}=2y$，

$$2x+4y+2z=14.2,\qquad \text{所以}\qquad x+2y+z=7.1.$$

从这条方程依次减去每条原方程，得

$$2\{y\}+\lfloor z\rfloor=3.2,\qquad \lfloor x\rfloor+\{z\}=1.8,\qquad \{x\}+2\lfloor y\rfloor=2.1.$$

中间那条是熟悉的类型，所以 $\lfloor x\rfloor=1$ 及 $\{z\}=0.8$。

在第三条方程中，$2\lfloor y\rfloor$ 仍然是整数而 $0\le\{x\}<1$，所以先前的推理仍然适用：$2\lfloor y\rfloor=2$ 及 $\{x\}=0.1$。因此 $\lfloor y\rfloor=1$ 及 $x=1.1$。

想一想 第一条方程是否仍然确定唯一的答案?

不是。这里 $2\{y\}$ 位于 $[0,2)$ 而非 $[0,1)$，所以把 3.2 写成一个整数加上一个 $[0,2)$ 中的数，共有两种方法:

- $\lfloor z\rfloor = 3$，$2\{y\} = 0.2$，所以 $\{y\} = 0.1$;
- $\lfloor z\rfloor = 2$，$2\{y\} = 1.2$，所以 $\{y\} = 0.6$。

(若 $\lfloor z\rfloor \geq 4$，则 $2\{y\} < 0$；若 $\lfloor z\rfloor \leq 1$，则 $2\{y\} \geq 2.2$；两者皆不可能。) 配合 $\lfloor y\rfloor = 1$ 及 $\{z\} = 0.8$，得到两个候选解:

$$(x,y,z) = (1.1,\ 1.1,\ 3.8) \qquad 或 \qquad (x,y,z) = (1.1,\ 1.6,\ 2.8).$$

两者都满足原方程组:

$$\begin{aligned}(1.1,1.1,3.8):&\quad 1.1+2+0.8=3.9,\quad 0.1+2.2+3=5.3,\quad 1+0.2+3.8=5;\\ (1.1,1.6,2.8):&\quad 1.1+2+0.8=3.9,\quad 0.1+3.2+2=5.3,\quad 1+1.2+2.8=5.\end{aligned}$$

所以 (iii) 中的方程组恰好有这两个解。

验算

如上所示，把答案代回原方程：每条方程两边都相等。作为独立的验算，用电脑让 x 和 y 取遍 $[-10,10]$ 中所有 0.1 的倍数进行搜索，结果 (i) 恰有一个解，(ii) 恰有一个解，而 (iii) 恰有上述两个解。留意对于 (ii) 的解，$\{y\} + \lfloor z\rfloor = 0.2 + 3 = 3.2$，与预期相符。

常见错误

- 算错负数的下取整 (floor)：$\lfloor -1.4\rfloor = -2$，而不是 -1，所以 (i) 中 $\{x\} = 0.6$。
- 在 (iii) 中误以为 $2\{y\}$ 是一个小数部分，因而只找到一个解。它其实位于 $[0,2)$，这正是第二个解出现的原因。
- 没有把候选解代回原方程检验。上面的推导只证明了它们是仅有的可能。

STEP 之外

把 x 写成 $x = \lfloor x\rfloor + \{x\}$，等同于在模 (modulo) 1 之下运算：小数部分就是 x 在圆 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上的像。下取整和小数部分在数论 (number theory) 中无处不在，例如计算整除 $n!$ 的质数 (prime) 最高次幂的勒让德 (Legendre) 公式，以及研究当 α 为无理数 (irrational

number）时，$n\alpha$ 的小数部分如何在 $[0,1)$ 上分布。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是这一系列概念的一本绝佳入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。