详细解答

STEP II 2021，第 2 题

纯数学 · 根的对称函数

> **STEP II 2021，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

关键思路

两个数的幂和（sums of powers）完全由两个量决定：它们的和与积。一旦知道 $a+b$ 和 a^2+b^2，积 ab 便随之确定，a^3+b^3 亦然；这就是第 (i) 部分中的约束条件。第 (iii) 部分运用同一事实，只是把 c “移除”：从三个变量的和中分别减去 c、c^2、c^3，便剩下两个变量的和，而第 (i) 部分的约束条件就变成 c 必须满足的一条三次方程（cubic equation）。

解答

第 (i) 部分

由 $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ 得 $p^2 = q+2ab$，所以

$$ab = \frac{p^2-q}{2}.$$

现在利用因式分解（factorisation）$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$：

$$\begin{aligned} r = a^3+b^3 &= p^3 - 3p\cdot\frac{p^2-q}{2} \\ &= \frac{2p^3-3p^3+3pq}{2} = \frac{3pq-p^3}{2}. \end{aligned}$$

因此 $3pq-p^3 = 2r$，得证。留意以上推导完全没有用到 p、q、r 是实数（real）这一点：此恒等式对任何复数（complex）a 和 b 均成立。我们在第 (iii) 部分会用到这一点。

第 (ii) 部分

二次方程（quadratic）$2x^2-2px+(p^2-q)=0$ 总有两个根（可能相等，也可能不是实数），由二次公式（quadratic formula）给出。把它们记为 a 和 b。两边除以 2，二次式为

$x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - q)$，所以

$$a + b = p, \qquad ab = \frac{p^2 - q}{2}.$$

这直接给出 $(*)$ 中的第一条方程。然后

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = p^2 - (p^2 - q) = q,$$

这是第二条；而

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = p^3 - \frac{3p(p^2 - q)}{2} = \frac{3pq - p^3}{2} = r,$$

最后一步用了假设 $3pq - p^3 = 2r$。所以 $(*)$ 中三条方程全部成立。

选取这条二次方程并非碰运气：第 (i) 部分已告诉我们 ab 必须是甚么，而两根之和为 p、积为 $\frac{1}{2}(p^2 - q)$ 的二次式，正正就是 $x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - q)$。

第 (iii) 部分

设

$$p = a + b = s - c, \qquad q = a^2 + b^2 = t - c^2, \qquad r = a^3 + b^3 = u - c^3.$$

> **想一想** 第 (i) 部分假设了 p、q、r 是实数，但这里它们涉及 c，而 c 可能是复数。我们仍然可以使用第 (i) 部分的结果吗?

可以：正如第 (i) 部分末尾所指出，那里的论证纯粹是代数运算，从未用到实数性。所以 $3pq - p^3 = 2r$，即

$$3(s - c)(t - c^2) - (s - c)^3 = 2(u - c^3).$$

展开，

$$3(s - c)(t - c^2) = 3st - 3sc^2 - 3tc + 3c^3,$$
$$(s - c)^3 = s^3 - 3s^2c + 3sc^2 - c^3,$$

所以方程变为

$$3st - 3sc^2 - 3tc + 3c^3 - s^3 + 3s^2c - 3sc^2 + c^3 = 2u - 2c^3.$$

按 c 的幂次合并：

$$6c^3 - 6sc^2 + 3(s^2 - t)c + 3st - s^3 - 2u = 0.$$

所以 c 是 $6x^3 - 6sx^2 + 3(s^2 - t)x + 3st - s^3 - 2u = 0$ 的一个根，得证。

系数只取决于 s、t、u，而它们对 a、b、c 是对称（symmetric）的。以 a（或 b）代替 c 的角色重复上述论证，可知 a 和 b 也是根。所以另外两个根就是 a 和 b。

想一想 为何 a、b、c 互不相同这一点很重要?

三次方程最多只有三个根。由于 a、b、c 是三个不同的根，它们就是全部的根，而且每个都是单根（simple root），所以

$$6x^3 - 6sx^2 + 3(s^2 - t)x + 3st - s^3 - 2u = 6(x-a)(x-b)(x-c).$$

（假如例如 $a = b$，我们便只知道两个根，无法确定第三个。）比较常数项（constant term），得 $3st - s^3 - 2u = -6abc = -6v$，即

$$s^3 - 3st + 2u = 6v.$$

第 (iv) 部分

这里 $s = 3$、$t = 1$、$u = -3$、$v = 2$。首先检查一致性：第 (iii) 部分的条件为 $27 - 9 - 6 = 12 = 6 \times 2$，所以成立。第 (iii) 部分指出 a、b、c 应是

$$6x^3 - 18x^2 + 3(9-1)x + 9 - 27 + 6 = 6x^3 - 18x^2 + 24x - 12 = 0,$$

的根，即 $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ 的根。由于 $x = 1$ 代入得 $1 - 3 + 4 - 2 = 0$，

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x-1)(x^2 - 2x + 2) = (x-1)((x-1)^2 + 1),$$

所以根为 1、$1+\mathrm{i}$、$1-\mathrm{i}$。取

$$a = 1, \qquad b = 1 + \mathrm{i}, \qquad c = 1 - \mathrm{i}.$$

第 (iii) 部分只告诉我们该往哪里找，所以现在必须验证：

- $a + b + c = 1 + (1+\mathrm{i}) + (1-\mathrm{i}) = 3$；
- $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$ 及 $(1-\mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$，所以 $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 2\mathrm{i} = 1$；
- $(1+\mathrm{i})^3 = 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = -2 + 2\mathrm{i}$ 及 $(1-\mathrm{i})^3 = -2\mathrm{i}(1-\mathrm{i}) = -2 - 2\mathrm{i}$，所以 $a^3 + b^3 + c^3 = 1 - 4 = -3$；
- $abc = 1 \cdot (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 1 \cdot 2 = 2$。

$(**)$ 中四条方程全部成立。（这三个数的任何排列都同样适用。）

验算

- 第 (i) 部分取 $a = 1$、$b = 2$：$p = 3$、$q = 5$、$r = 9$，而 $3pq - p^3 = 45 - 27 = 18 = 2r$。

- 第 (iii) 部分取 $a,b,c=1,2,3$：$s=6$、$t=14$、$u=36$、$v=6$，而 $s^3-3st+2u=216-252+72=36=6v$。三次式为 $6x^3-36x^2+66x-36=6(x-1)(x-2)(x-3)$，与预期相符。
- 第 (i)–(iii) 部分的恒等式亦已用电脑对大量随机复数 a、b、c 作验证。

常见错误

- 在第 (iii) 部分直接说“a 和 b 是另外两个根”，却没有指出三次式的系数对 a、b、c 是对称的。
- 由根之积推出 $s^3-3st+2u=6v$，却没有利用三数互不相同来确定 a、b、c 就是全部的根。
- 在第 (iv) 部分只求出三次方程的根便停下：题目要求你明确验证四条方程。

STEP 之外

这道题是牛顿恒等式（Newton's identities）的一个小特例。牛顿恒等式把幂和 $a^k+b^k+c^k$ 与初等对称函数（elementary symmetric functions）$a+b+c$、$ab+bc+ca$、abc 联系起来。对称多项式基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials）指出，每个对称多项式都可以用初等对称多项式表示，而这正是伽罗瓦理论（Galois theory）的起点。如欲深入了解，可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。