详细解答

STEP II 2021，第 12 题

概率与统计 · 赌徒破产问题

> **STEP II 2021，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

关键思路

每场比赛都会不断回到之前出现过的局面。因此，我们不去把无穷多种获胜方式逐一加起来，而是设 P 为从该局面出发获胜的概率（probability），再按下一步发生的事情作条件分析（conditioning），得出一条 P 同时出现在两边的方程。同样的技巧用在谨慎玩法上，就能把它化为第 (ii) 部分的比赛。

解答

第 (i) 部分

设 P 为 A 赢得整场比赛的概率。按第一局的结果作条件分析。A 以概率 p_{A} 赢得该局，比赛随即结束。B 以概率 p_{B} 赢得该局，A 便输了。否则该局打和，概率为 $1-p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}}$；由于各局相互独立（independent），比赛重新开始，所以 A 从该处获胜的机会仍然是 P。因此

$$P = p_{\mathrm{A}} + (1-p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}})P \quad\Longrightarrow\quad (p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}})P = p_{\mathrm{A}} \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{p_{\mathrm{A}}}{p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}}},$$

这里两边除以 $p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}} > 0$。（等价地，A 在第 k 局获胜的概率为 $(1-p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}})^{k-1}p_{\mathrm{A}}$，而由于 $0 < p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}} < 1$，这个几何级数（geometric series）收敛。）

第 (ii) 部分

设 D 为进行若干局后 A 的胜局数减去 B 的胜局数。每一局使 D 改变 $+1$ 或 -1，而比赛在首次出现 $|D| = 2$ 时结束。

*长度为偶数。*进行 n 局后，若 A 胜 a 局、B 胜 b 局，则 $a+b=n$ 且 $D = a-b = n-2b$，

所以 D 与 n 的奇偶性（parity）相同。比赛在 $D = \pm 2$ 时结束，而这是偶数，所以 n 是偶数。

概率。把各局两两成对来看。比赛开始时双方打平（$D = 0$），而由于比赛只能在偶数局后结束，每一对未能结束比赛的局之后，双方又会再次打平。从打平的局面出发，接下来两局是 AA 的概率为 p^2（A 胜），是 BB 的概率为 q^2（B 胜），是 AB 或 BA 的总概率为 $2pq$，此时比赛再次打平。设 P 为 A 从打平局面出发获胜的概率，则

$$P = p^2 + 2pq\,P \quad \Longrightarrow \quad P = \frac{p^2}{1 - 2pq}.$$

由于 $p + q = 1$，有 $1 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$，所以 $1 - 2pq = p^2 + q^2$，且

$$P = \frac{p^2}{p^2 + q^2},$$

即为所求。这里 $p^2 + q^2 > 0$，所以除法没有问题。

第 (iii) 部分

谨慎玩法。筹码数目每轮增加或减少一个，由 1 开始，到 0（输）或 4（赢）时停止。它不能跳过 4，所以玩家获胜当且仅当筹码数目先到达 4 而不是先到达 0。

> **想一想** 从 2 个筹码出发，玩家需要做到甚么？我们以前见过这种情况吗？

从 2 个筹码出发，玩家要在输的轮数比赢的轮数多出两轮（到达 0）之前，先做到赢的轮数比输的轮数多出两轮（到达 4），才能获胜。这正是第 (ii) 部分的比赛，其中玩家是 A，碰运气的游戏是 B。所以从 2 个筹码出发，获胜的概率为 $\dfrac{p^2}{p^2 + q^2}$。

从 1 个筹码出发，第一轮必须赢，否则玩家跌至 0 而输掉。所以第一轮以概率 p 使玩家到达 2 个筹码，而各轮相互独立，因此

$$P_{\text{cautious}} = p \cdot \frac{p^2}{p^2 + q^2} = \frac{p^3}{p^2 + q^2}.$$

（如果你偏好用方程：设 P_k 为从 k 个筹码出发获胜的概率，则 $P_1 = pP_2$、$P_2 = pP_3 + qP_1$ 及 $P_3 = p + qP_2$ 会给出相同的答案。）

大胆玩法。从 1 个筹码出发，数目变为 2 或 0；从 2 个出发，数目变为 4 或 0。所以玩家只有赢得头两轮才能获胜：

$$P_{\text{bold}} = p^2.$$

比较。两个概率都是正数，所以我们把它们的比与 1 作比较：

$$\frac{P_{\text{cautious}}}{P_{\text{bold}}} = \frac{p}{p^2 + q^2}.$$

由于 $p^2+q^2>0$，这个比大于 1 当且仅当

$$p>p^2+q^2 \iff p-p^2>q^2 \iff pq>q^2 \iff p>q,$$

最后一步除以 $q>0$（因为 $p<1$，所以成立）。而 $p>q=1-p$ 恰好在 $p>\frac{1}{2}$ 时成立。同理，这个比小于 1 恰好在 $p<q$，即 $p<\frac{1}{2}$ 时成立。所以当 $\frac{1}{2}<p<1$ 时谨慎玩法较好，当 $0<p<\frac{1}{2}$ 时大胆玩法较好。（在 $p=\frac{1}{2}$ 时两者都给出 $\frac{1}{4}$。）

验算

- 在 $p=\frac{1}{2}$ 时，谨慎玩法是一个公平的随机漫步（random walk），从 1 出发先到达 4 而不是先到达 0 的机会是 $\frac{1}{4}$。我们的公式给出 $\frac{1}{8}/\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，与大胆玩法的 $p^2=\frac{1}{4}$ 一致。
- 在 $p=0.7$ 时：谨慎玩法给出 $0.343/0.58\approx 0.591$，大胆玩法给出 0.49。在 $p=0.3$ 时：谨慎玩法给出 $0.027/0.58\approx 0.0466$，大胆玩法给出 0.09。两者都与逐轮追踪筹码分布的电脑验算相符。
- 在第 (ii) 部分，$p=\frac{1}{2}$ 给出 $\frac{1}{2}$，正如对称性所要求的。

常见错误

- 在第 (ii) 部分，把“AB”和“BA”当作同一个概率为 pq 的结果，而不是 $2pq$。
- 忘记说明为何一对未结束比赛的局总会使比赛回到打平状态。理由是比赛不可能在奇数局后结束。
- 在比较时，没有说明有关的量是正数便展开相乘或相除。

STEP 之外

谨慎玩法正是*赌徒破产*（gambler's ruin）问题。它是一个带有吸收壁（absorbing barriers）的随机漫步；当 $p\neq q$ 时，从 k 出发、目标为 N 的一般答案是 $\dfrac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N}$。在不利的游戏中大胆玩法最好、在有利的游戏中保守玩法最好，这个结果可追溯至 Dubins 和 Savage 对最优赌博策略的研究。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）正是用这种“按第一步作条件分析”的方法来处理随机漫步和赌徒破产问题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。