详细解答

STEP II 2021，第 10 题

力学 • 非惯性参考系

STEP II 2021，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 11.5 节加速火车中的重力中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/accelerating-frame.html

关键思路

坐标轴随列车移动，所以它们并不构成惯性参考系（inertial frame）。最干净利落的处理方法，是求出珠子的真实加速度：即珠子相对于列车的加速度，加上列车本身的加速度。这样牛顿第二定律（Newton's second law）便成立；又因为钢线光滑（smooth），反作用力（reaction）垂直于钢线，所以它沿珠子的路径不做功。把运动方程与珠子的（相对）速度取点积，便能消去未知的反作用力，剩下一个类似能量、而且守恒的量。

解答

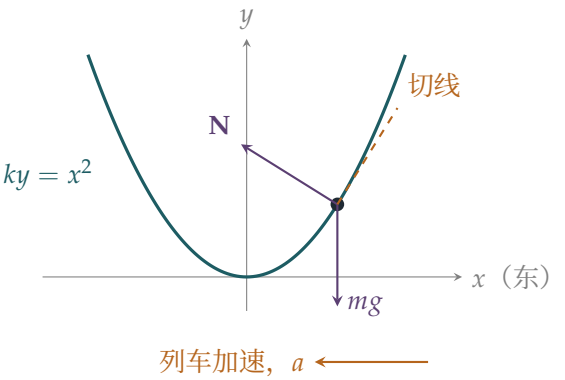
把珠子视为质量为 m 的质点，并把钢线视为光滑，因此钢线对珠子的反作用力 $\mathbf{N}$ 恒垂直于钢线。设 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 分别为指向东方和向上的单位向量（unit vector）。

列车向西加速，所以它的加速度是 $-a\mathbf{i}$。珠子相对于列车的位置是 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$，因此它的真实（地面参考系中的）加速度是

$$(\ddot{x}-a)\,\mathbf{i}+\ddot{y}\,\mathbf{j}.$$

作用于珠子的力只有重力 $-mg\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{N}$，所以由牛顿第二定律得

$$m(\ddot{x}-a)\,\mathbf{i}+m\ddot{y}\,\mathbf{j}=\mathbf{N}-mg\,\mathbf{j}. \qquad (*)$$



第 (i) 部分

假设珠子相对于列车一直停留在原点。那么它便与列车有相同的加速度 $-a\mathbf{i}$，因此需要一个水平力 $-ma\mathbf{i}$，其中 $a > 0$。但在原点处，钢线 $y = x^2/k$ 的斜率为 $2x/k = 0$，即钢线在该处是水平的，而光滑钢线的反作用力垂直于钢线，也就是铅直方向。重力同样是铅直的。既然没有任何水平力作用，珠子便不可能随列车一起加速；它必定相对于列车移动。（珠子的真实水平加速度是 0，而列车的加速度是向西的 a，所以珠子开始沿钢线向东滑动，即朝 x 的正方向移动。）

第 (ii) 部分

珠子沿钢线移动时，由于钢线固定在列车上，珠子相对于列车的速度 $\dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j}$ 与钢线相切。由于 $\mathbf{N}$ 垂直于钢线，

$$\mathbf{N} \cdot (\dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j}) = 0.$$

把 $(*)$ 改写为 $m(\ddot{x} - a)\,\mathbf{i} + m(\ddot{y} + g)\,\mathbf{j} = \mathbf{N}$，然后两边与 $\dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j}$ 取纯量积(scalar product)，再除以 m，得

$$\dot{x}(\ddot{x} - a) + \dot{y}(\ddot{y} + g) = 0,$$

此即所求。左边恰好是一个导数（exact derivative）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - ax + gy\right) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} - a\dot{x} + g\dot{y} = 0,$$

所以在整个运动过程中，$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - ax + gy$ 是常数。

? **想一想** 既然反作用力在地面参考系中会做功，为甚么与相对速度取点积是合理的?

在地面参考系中，珠子的速度多了一项 $-at\,\mathbf{i}$，它并不沿着钢线方向，所以 $\mathbf{N}$ 在该参考系中会做功。但恒等式 $\mathbf{N} \cdot \mathbf{u} = 0$ 纯粹是几何事实：对任何与钢线相切的向量 $\mathbf{u}$ 都成立，而相对速度正是这样的向量。我们用到的就只有这一点。

第 (iii) 部分

开始时 $x = y = 0$ 且 $\dot{x} = \dot{y} = 0$，所以该常数为 0。设 v 为相对于列车的速率，并利用 $y = x^2/k$，得

$$\tfrac{1}{2}v^2 = ax - gy = ax - \frac{gx^2}{k} = \frac{g}{k}\,x\Big(\frac{ak}{g} - x\Big). \qquad (\dagger)$$

由于 $v^2 \geq 0$，珠子被限制在 $0 \leq x \leq ak/g$ 之内，而且只有在这个区间的两个端点才有 $v = 0$。由第 (i) 部分，珠子开始时朝 x 的正方向移动。当 $0 < x < ak/g$ 时，它的速率为正，所以它沿钢线一直朝同一方向移动，直至到达 $x = ak/g$，在该处瞬间静止。（珠子确实会在该处折返：$(*)$ 在该点的切向分量（tangential component）不为零，因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax - gx^2/k) = a - 2a = -a \neq 0$。）之后珠子在 $x = 0$ 与 $x = ak/g$ 之间来回振荡（oscillate）。

在这个区间上，$y = x^2/k$ 是 x 的递增函数，所以最大高度在 $x = ak/g$ 处达到：

$$b = \frac{1}{k}\Big(\frac{ak}{g}\Big)^2 = \frac{a^2k}{g^2}.$$

第 (iv) 部分

由 $(\dagger)$，$v^2 = 2\big(ax - gx^2/k\big)$，这是 x 的二次函数，其最大值出现在两根 0 与 ak/g 的中点，所以相对于列车的速率在以下位置最大：

$$x = \frac{ak}{2g}.$$

在该处

$$v^2 = 2\Big(\frac{a^2k}{2g} - \frac{a^2k}{4g}\Big) = \frac{a^2k}{2g}, \qquad \text{所以} \qquad v_{\max} = a\sqrt{\frac{k}{2g}}.$$

验算

- 极限情况：若 $a = 0$，珠子只会停留在钢线的最低点；而的确 $b = 0$ 且 $v_{\max} = 0$。
- 有效重力（effective gravity）：在列车中，珠子感受到的有效重力是 $(a, -g)$，向东倾斜。速率最大的位置 $x = ak/(2g)$，恰好是钢线斜率 $2x/k$ 等于 a/g 之处，因此该处的切线垂直于有效重力：这正是钢线在倾斜重力场中的“最低点”。折返点 $x = ak/g$ 与原点的距离是它的两倍，这与在一个关于 x 为二次的势能中作对称振荡的情况一致。
- 量纲（dimensions）：k 是长度，所以 a^2k/g^2 是长度，而 $a\sqrt{k/g}$ 是速率。
- 数值验证：取 $a = 2$、$k = 1.5$ 及 $g = 9.8$（国际单位制），用电脑逐步推进运动，得到最大高度为 0.06247 m，最大速率为 0.5533 m s^{-1}，出现在 $x = 0.1531$ m，分别与 a^2k/g^2、$a\sqrt{k/(2g)}$ 和 $ak/(2g)$ 吻合。

常见错误

- 把 $\ddot{x}$ 当作珠子的真实水平加速度。$\ddot{x}$ 只是珠子相对于列车的加速度，必须再加上列车本身的加速度 $-a$。
- 弄错 a 的正负号：列车向西加速，所以在列车中珠子被推向东，即朝 x 的正方向。
- 以为速率在钢线的最低点 $x = 0$ 处最大。在列车中，有效的“向下”方向是倾斜的，所以速率最大的位置其实是 $x = ak/(2g)$。

STEP 之外

第 (ii) 部分让你初尝非惯性参考系（non-inertial frame）中的力学：在列车的参考系中，$-ax$ 这一项就像一个向东、大小为 ma 的均匀“虚拟力”（fictitious force）所对应的势能（potential energy），把它与重力合并，便得到倾斜的有效重力。到了大学，这套想法会推广至旋转参考系，届时会出现离心力（centrifugal force）和科里奥利力（Coriolis force）；亦会推广至拉格朗日力学（Lagrangian mechanics），在那里像 **N** 这样的约束力（constraint force）从一开始便被消去。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）有一章很好地讲解了非惯性系统和虚拟力。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。