详细解答

STEP II 2021，第 1 题

纯数学 · 三角方程

> **STEP II 2021，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

关键思路

正弦与余弦的乘积不好处理，但它们的和却很容易处理，所以开首的恒等式（identity）让我们把乘积换成和。在 (i) 中，这把一个三重乘积化成一个关于 $\cos 2x$ 的三次式（cubic），而且有一个一眼可见的因式。在 (ii) 中，我们先消去正切（tangent），再把每个因子与另一类型的对应因子配对，整条方程便会化简成两个简单因式的乘积。唯一需要额外留意的，是正切无定义的那些点。

解答

恒等式

把展开式

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B,\qquad \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

相加，得 $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$。取 $A=3a$ 及 $B=a$，

$$\cos a\cos 3a=\tfrac{1}{2}(\cos 4a+\cos 2a),$$

此即所求。同样地，把 $\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$ 相加，得 $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$。取 $A=a$ 及 $B=3a$，并利用 $\sin(-2a)=-\sin 2a$，

$$\sin a\cos 3a=\tfrac{1}{2}(\sin 4a-\sin 2a).$$

（把角色对调，取 $A=3a$ 及 $B=a$，便得到配套的 $\cos a\sin 3a=\frac{1}{2}(\sin 4a+\sin 2a)$，稍后我们也会用到。）

第 (i) 部分

由第一条恒等式，$4\cos x\cos 2x\cos 3x = 2\cos 2x\,(\cos 4x + \cos 2x)$。设 $c = \cos 2x$，于是 $\cos 4x = 2c^2 - 1$。方程变成

$$2c\,(2c^2 + c - 1) = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad 4c^3 + 2c^2 - 2c - 1 = 0.$$

把各项两两分组，$2c^2(2c+1) - (2c+1) = 0$，即

$$(2c+1)(2c^2 - 1) = 0,$$

所以 $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ 或 $\cos 2x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。

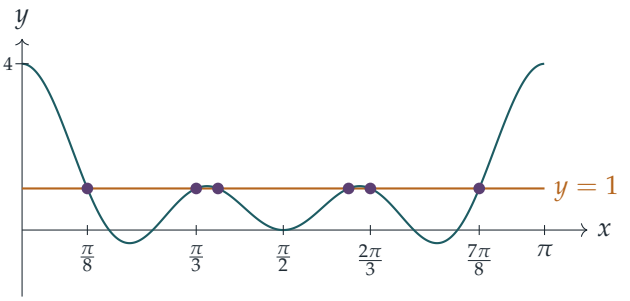
当 $0 \le x \le \pi$ 时，$0 \le 2x \le 2\pi$，而 $\cos 2x$ 每一个严格介乎 -1 与 1 之间的值，都在此范围内给出两个 $2x$ 的值：

$$\begin{aligned}
\cos 2x = -\tfrac{1}{2} &\implies 2x = \tfrac{2\pi}{3},\ \tfrac{4\pi}{3} &&\implies x = \tfrac{\pi}{3},\ \tfrac{2\pi}{3};\\
\cos 2x = \tfrac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2x = \tfrac{\pi}{4},\ \tfrac{7\pi}{4} &&\implies x = \tfrac{\pi}{8},\ \tfrac{7\pi}{8};\\
\cos 2x = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2x = \tfrac{3\pi}{4},\ \tfrac{5\pi}{4} &&\implies x = \tfrac{3\pi}{8},\ \tfrac{5\pi}{8}.
\end{aligned}$$

每一步都是可逆的，所以解为

$$x = \frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{3\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{7\pi}{8}.$$

图像证实曲线与直线 $y = 1$ 恰好相交六次。



第 (ii) 部分

设 $\tan x = \tan 2x \tan 3x \tan 4x$。要这式子有意义，四个正切都必须有定义，所以 $\cos x$、$\cos 2x$、$\cos 3x$ 及 $\cos 4x$ 全都不为零。因此我们可以两边同乘 $\cos x\cos 2x\cos 3x\cos 4x$，得

$$\sin x\cos 3x\cdot\cos 2x\cos 4x = \cos x\sin 3x\cdot\sin 2x\sin 4x.$$

? **想一想** 为甚么要把 $\sin x$ 与 $\cos 3x$ 配对，把 $\cos x$ 与 $\sin 3x$ 配对?

因为这正好是我们的恒等式能化成和的乘积，而且两个和都只涉及 $\sin 4x$ 与 $\sin 2x$，它们本来已在方程的其他地方出现。利用 $\sin x\cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)$ 及 $\cos x \sin 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$，再乘以 2，

$$(\sin 4x - \sin 2x)\cos 2x \cos 4x = (\sin 4x + \sin 2x)\sin 2x \sin 4x.$$

现在把左边的 $\sin 2x \cos 2x$ 换成 $\frac{1}{2}\sin 4x$，使每一项都有因子 $\sin 4x$：

$$\sin 4x \cos 4x \cos 2x - \tfrac{1}{2}\sin 4x \cos 4x = \sin 4x \sin^2 2x + \sin 4x \sin 4x \sin 2x.$$

把所有项移到同一边，

$$\sin 4x \left[(\cos 4x \cos 2x - \sin 4x \sin 2x) - \left(\sin^2 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right)\right] = 0.$$

第一个括号是 $\cos(4x+2x) = \cos 6x$。至于第二个，$\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1-\cos 4x)$，所以 $\sin^2 2x + \frac{1}{2}\cos 4x = \frac{1}{2}$。因此

$$\sin 4x \left(\cos 6x - \tfrac{1}{2}\right) = 0,$$

所以 $\cos 6x = \frac{1}{2}$ 或 $\sin 4x = 0$，此即所求。

接着求 $(\star)$ 在 $0 \le x \le \pi$ 内的解。

想一想 $\sin 4x(\cos 6x - \frac{1}{2}) = 0$ 的每一个解都是 $(\star)$ 的解吗?

不一定：唯一可能不可逆的步骤是乘以那些余弦，而这一步恰好在四个正切都有定义时才可逆。所以 $(\star)$ 的解，就是 $\sin 4x(\cos 6x - \frac{1}{2}) = 0$ 中满足 $\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x \neq 0$ 的那些解。

情况 $\sin 4x = 0$。在 $[0,\pi]$ 内这给出 $x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi$。在 $x = \frac{\pi}{4}$ 及 $x = \frac{3\pi}{4}$，$\tan 2x$ 无定义；在 $x = \frac{\pi}{2}$，$\tan x$ 无定义。在 $x = 0$ 及 $x = \pi$，每个正切都是 0，而 $(\star)$ 变成 $0 = 0$。所以 $x = 0$ 及 $x = \pi$ 是解。

情况 $\cos 6x = \frac{1}{2}$。此时 $6x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$，所以 $x = \frac{(6k\pm 1)\pi}{18}$。由 $0 \le 6x \le 6\pi$ 得

$$x = \frac{\pi}{18},\ \frac{5\pi}{18},\ \frac{7\pi}{18},\ \frac{11\pi}{18},\ \frac{13\pi}{18},\ \frac{17\pi}{18}.$$

每一个都是 $\frac{m\pi}{18}$ 的形式，其中 m 不是 3 的倍数。余弦 $\cos nx$ 只在 nx 是 $\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{18}$ 的奇数倍时才为零，这需要 $9 \mid nm$。由于 $3 \nmid m$，这就需要 $9 \mid n$，但对 $n \in \{1,2,3,4\}$ 而言这是不可能的。所以四个正切都有定义，这六个值全都是解。

总括而言，$(\star)$ 在 $0 \le x \le \pi$ 内有八个解：

$$x = 0,\ \frac{\pi}{18},\ \frac{5\pi}{18},\ \frac{7\pi}{18},\ \frac{11\pi}{18},\ \frac{13\pi}{18},\ \frac{17\pi}{18},\ \pi.$$

验算

- 在 (i) 中，当 $x = \frac{\pi}{8}$ 时：$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，且 $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$，所以乘积是 $4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1$。
- 在 (ii) 中，当 $x = \frac{\pi}{18} = 10^\circ$ 时：$\tan 10^\circ \approx 0.17633$，而 $\tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ \approx 0.36397 \times 0.57735 \times 0.83910 \approx 0.17633$。
- 用电脑在 $[0, \pi]$ 上扫描两条方程，分别恰好找到六个和八个解，位置正是上述各值。

常见错误

- 在 (ii) 中保留了 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$：它们满足 $\sin 4x = 0$，但会令 $(\star)$ 中某个正切无定义。
- 漏掉 $x = 0$ 及 $x = \pi$，或在每个周期内漏掉 $2x$（或 $6x$）的第二个值。
- 在化简过程中除以 $\sin 4x$，这会失去题目要你找出的那个因式。

STEP 之外

积化和差公式（product-to-sum formulae）其实是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}B} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+B)}$ 在实变量世界中的投影：写成 $\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$，便能把任何余弦的乘积化成和，而这正是通往傅里叶级数（Fourier series）的第一步——在傅里叶级数中，函数被展开成 $\cos nx$ 与 $\sin nx$ 的和。藏在 (ii) 中的惊人恒等式 $\tan 10^\circ = \tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ$，正是把三角函数值看成单位根（roots of unity）时常会出现的那类惊喜。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）把这个观点发挥得非常出色。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。