详细解答

STEP III 2020，第 9 题

力学 · 刚体平衡

STEP III 2020，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

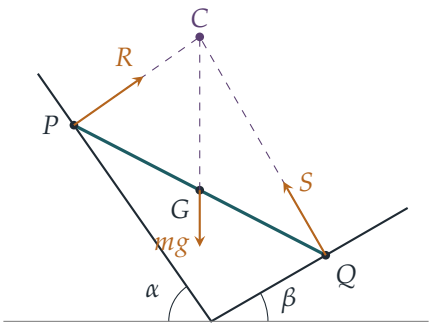
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

杆只受三个力作用：作用于中点的重力，以及两端各一个接触力。一个物体在三个互不平行的力作用下处于平衡（equilibrium）时，三力的作用线（lines of action）必交于同一点，因此整道题就变成几何问题：用两种不同方法求出该交点的高度，然后令两者相等。在第 (ii) 部分，Q 处的法向反作用力（normal reaction）与极限摩擦力（limiting friction）合成为一个总反作用力，它偏离法线的角度为摩擦角（angle of friction）λ，其中 $\tan\lambda = \mu$；同样的几何论证仍然适用，只需把 β 换成 $\beta + \lambda$。

解答

把杆视为均匀（uniform）的刚体（rigid body），长度为 $2l$，中点为 G，并假设两个平面固定不动。设 Π_1 位于两平面交线的左方，Π_2 位于右方，于是 P 在左方且较高，Q 在右方且较低。



第 (i) 部分

两个平面都是光滑（smooth）的，所以 P 处的反作用力 R 垂直于 Π_1，Q 处的反作用力 S 垂直于 Π_2。垂直于一个倾角为 α 的平面的直线，与铅垂线的夹角为 α；因此 R 的作用线从 P 向上延伸并向 Q 一方倾斜，与向上铅垂线成 α 角；而 S 的作用线从 Q 向上延伸并向 P 一方倾斜，与向上铅垂线成 β 角。

杆在三个力作用下平衡：R、S，以及经过 G 铅垂向下的重力 mg。对 R 与 S 作用线的交点 C 取力矩（moments），R 和 S 的力矩均为零，所以重力的力矩也必须为零：重力的作用线经过 C。因此 C 位于 G 的正上方。

> ? **想一想** 怎样把“C 位于 G 的正上方”转化为一条方程?

沿两条途径计算 C 高出 Q 的高度。由于 G 是中点，而杆与水平线成 θ 角，G 与两端的水平距离均为 $l\cos\theta$，而 P 比 Q 高 $2l\sin\theta$。

- 沿 R 的作用线：沿一条与铅垂线成 α 角的直线移动水平距离 $l\cos\theta$，高度上升 $l\cos\theta\cot\alpha$。所以 C 高出 Q 的高度为 $2l\sin\theta + l\cos\theta\cot\alpha$。
- 沿 S 的作用线：同理，C 高出 Q 的高度为 $l\cos\theta\cot\beta$。

令两者相等，再除以 $l\cos\theta \neq 0$，得

$$2\tan\theta + \cot\alpha = \cot\beta, \qquad \text{即} \qquad 2\tan\theta = \cot\beta - \cot\alpha,$$

此即所求。由于 $\beta < \alpha$（两者皆为锐角），$\cot\beta > \cot\alpha$，所以 $\theta > 0$，与 P 高于 Q 一致。

第 (ii) 部分

现在 Π_1 仍然光滑，所以 P 处的反作用力与之前完全相同。在 Q 处则有法向反作用力 N，以及沿 Π_2 的摩擦力 F。

*摩擦力的方向。*杆是刚体，所以 P 与 Q 的速度沿杆方向的分量相等。若 P 开始以速率 u 沿 Π_1 向下滑动，而 Q 以（带正负号的）速率 w 沿 Π_2 向上移动，则沿杆从 P 指向 Q 的方向（此方向在水平线下方 ϕ 角）分解，得

$$u\cos(\alpha - \phi) = w\cos(\beta + \phi).$$

这里 $\cos(\alpha - \phi) > 0$，而下文会证明 $\phi + \beta < \frac{1}{2}\pi$，所以 $w > 0$：Q 即将沿 Π_2 向上移动。摩擦力阻碍这个运动，所以 F 沿 Π_2 向下作用；又因平衡处于极限状态，$F = \mu N$。

*总反作用力。*把 N 与 F 合成为单一个力 S'。它与法线成 λ 角，其中 $\tan\lambda = F/N = \mu$；由于 F 沿平面向下（指向两平面的交线），它令反作用力进一步向 P 一方倾斜。所以 S' 的作用线从 Q 向上延伸，与向上铅垂线成 $\beta + \lambda$ 角，并向 P 一方倾斜。（若 $\beta + \lambda > \frac{1}{2}\pi$，这条作用线实际上是向下的；下面的高度公式仍然成立，只是余切值为负。）

杆再次在三个力作用下平衡，所以三力的作用线交于 G 正上方的一点，而第 (i) 部分的论证可以逐字照搬，只需把 θ 换成 ϕ，β 换成 $\beta+\lambda$：

$$2\tan\phi = \cot(\beta+\lambda) - \cot\alpha.$$

由此可见 $2\tan\phi < \cot\beta$，所以 $\tan\phi < \cot\beta = \tan(\frac{1}{2}\pi - \beta)$，即 $\phi + \beta < \frac{1}{2}\pi$，这就证实了我们对摩擦力方向的假设。

与 $2\tan\theta = \cot\beta - \cot\alpha$ 相减，得

$$2(\tan\theta - \tan\phi) = \cot\beta - \cot(\beta+\lambda) = \frac{\sin(\beta+\lambda)\cos\beta - \cos(\beta+\lambda)\sin\beta}{\sin\beta\,\sin(\beta+\lambda)}$$
$$= \frac{\sin\lambda}{\sin\beta\,(\sin\beta\cos\lambda + \cos\beta\sin\lambda)}.$$

分子分母同除以 $\cos\lambda$，利用 $\tan\lambda = \mu$，再提出因子 $\cos\beta$：

$$2(\tan\theta - \tan\phi) = \frac{\mu}{\sin\beta\,(\sin\beta + \mu\cos\beta)} = \frac{\mu}{\sin\beta\cos\beta\,(\tan\beta+\mu)} = \frac{2\mu}{(\mu+\tan\beta)\sin 2\beta}.$$

两边除以 2，得

$$\tan\theta - \tan\phi = \frac{\mu}{(\mu+\tan\beta)\sin 2\beta},$$

此即所求结果。

验算

- 当 $\mu = 0$ 时右方为 0，所以 $\phi = \theta$：第 (ii) 部分退化为第 (i) 部分，理应如此。
- 右方为正，所以 $\phi < \theta$：摩擦力令杆可以比在光滑平面上更平地静止，这是合理的，因为 P 正是即将向下滑动的一端。
- 取 $\alpha = 60°$，$\beta = 30°$。则 $2\tan\theta = \sqrt{3} - 1/\sqrt{3} = 2/\sqrt{3}$，所以 $\theta = 30°$。取 $\mu = 0.5$，公式给出 $\tan\phi = 0.5774 - 0.5/(1.0774\times 0.8660) \approx 0.0415$，所以 $\phi \approx 2.4°$。对这些数值直接解水平分解、铅垂分解及对 G 取力矩所得的方程（以电脑验算，并对数千组随机角度及摩擦系数重复进行），得到相同的 ϕ。
- 任何 μ 都可以借助 $2\tan\phi = \cot(\beta+\lambda) - \cot\alpha$ 迅速验算：这里 $\lambda \approx 26.57°$，$\cot 56.57° \approx 0.6606$，而 $(0.6606 - 0.5774)/2 \approx 0.0416$，在舍入误差范围内吻合。

常见错误

- 把摩擦力设为沿 Π_2 向上。当 P 向下滑动时，杆长不变迫使 Q 沿其所在平面向上移动，所以 Q 处的摩擦力沿该平面向下。
- 从水平线而非铅垂线量度反作用力的角度：倾角为 α 的平面的法线与铅垂线成 α 角。

STEP 之外

这里用到的三力共点（concurrency）原理，是刚体平衡一般条件的特例：合力为零，以及对任何一点的合力矩为零。把摩擦力与法向反作用力合成为半顶角为 λ 的“摩擦锥”（cone of friction），正是工程师分析梯子、楔子和螺丝稳定性的方法；而用速度判断摩擦力方向的论证，就是瞬时转动中心（instantaneous centre of rotation）的概念。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）正是以这种精神处理刚体静力学和摩擦。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。