详细解答

STEP III 2020，第 8 题

纯数学 · 数列与递降法

STEP III 2020，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 1.8 节 *计数有理数* 中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch01/counting-rationals.html

关键思路

每个下标（subscript）较大的项，都由下标约为其一半的项构成。因此，任何关于数对 (u_n, u_{n+1}) 的命题，都可以推回到下标较小的数对；以*递降法*（descent）论证（等价于选取最小的反例（counterexample）），便能处理每一部分。先写出首几项，并观察每一对相邻项如何产生两对新的项，在证明之前就能看清规律。

解答

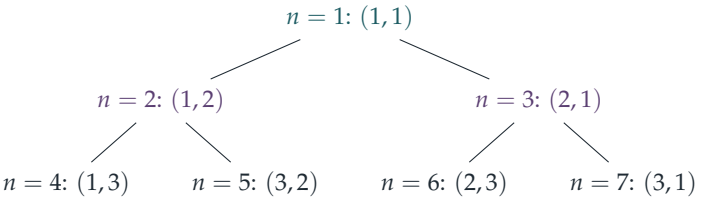
首十六项为

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 3,\ 5,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4,\ 1.$$

每一项都是正整数：u_1 显然如此，而之后每一项要么是较前的某一项，要么是两个较前的项之和，所以由（强）归纳法（induction）可得此结论。

值得记下一个数对如何产生后面的数对。若 $(u_k, u_{k+1}) = (a, b)$，则直接由定义得

$$(u_{2k}, u_{2k+1}) = (a,\ a+b), \qquad (u_{2k+1}, u_{2k+2}) = (a+b,\ b). \tag{$*$}$$



位置 n 的数对是 (u_n, u_{n+1})；由 $(*)$，它的左子节点位于 $2n$，右子节点位于 $2n+1$。每个位于 $n \geq 2$ 的数对，都恰好以这种方式由位置 $\lfloor n/2 \rfloor$ 的数对产生。

第 (i) 部分

取一对相邻项 (u_n, u_{n+1})，其中 $n \geq 2$，并设 $k = \lfloor n/2 \rfloor \geq 1$。

- 若 $n = 2k$, 该数对为 $(u_k,\ u_k + u_{k+1})$。由于 $u_{k+1} \geq 1$, 奇数下标的项 $u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$ 大于偶数下标的项 $u_{2k} = u_k$。
- 若 $n = 2k+1$，该数对为 $(u_k + u_{k+1},\ u_{k+1})$。此时由于 $u_k \geq 1$，$u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$ 大于 $u_{2k+2} = u_{k+1}$。

因此，除了第一对 $(u_1, u_2) = (1,1)$ 之外，每一对中奇数下标的项都严格较大。特别地，只有第一对的两项相等。

第 (ii) 部分

假设 $d > 1$ 同时整除 u_n 和 u_{n+1}。由于 $u_1 = u_2 = 1$, 这不可能在 $n = 1$ 时发生, 故 $n \geq 2$; 设 $k = \lfloor n/2 \rfloor$，则 $1 \leq k < n$。

- 若 $n = 2k$：$d \mid u_{2k} = u_k$ 且 $d \mid u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$，所以 d 整除两者之差 u_{k+1}。
- 若 $n = 2k+1$：$d \mid u_{2k+2} = u_{k+1}$ 且 $d \mid u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$，所以 $d \mid u_k$。

无论哪种情况，d 都同时整除 u_k 和 u_{k+1}，即较前的一对相邻项，这正是需要证明的。

现在假设某一对相邻项有公因数 $d > 1$, 并在这样的数对中选取 n 最小的一对 (u_n, u_{n+1})。如上所述 $n \neq 1$，而刚才的论证会给出位于 $k < n$、具有相同公因数的数对，与 n 的最小性矛盾。因此任意两个相邻项都互质（co-prime）。

第 (iii) 部分

假设某个有序数对 (a, b) 在两个不同位置出现，即 $(u_m, u_{m+1}) = (u_n, u_{n+1}) = (a, b)$，其中 $m < n$。在所有这类重复中，选取 m 最小的一个。

若 $m = 1$，则 $a = b = 1$；但 $n \geq 2$，由第 (i) 部分，位置 n 的数对两项不相等。所以

$m \geq 2$，再由第 (i) 部分亦有 $a \neq b$。

想一想 单凭 a 和 b，怎样判断位置是奇数还是偶数?

第 (i) 部分告诉我们，数对中较大的一项具有奇数下标，所以位置的奇偶性（parity）由数对本身决定：

- 若 $a < b$，第二项具有奇数下标，所以 m 和 n 都是偶数：$m = 2j$，$n = 2k$，其中 $j < k$。于是 $u_j = u_{2j} = a$ 且 $u_{j+1} = u_{2j+1} - u_j = b - a$；同理 $(u_k, u_{k+1}) = (a, b-a)$。
- 若 $a > b$，则 m 和 n 都是奇数：$m = 2j+1$，$n = 2k+1$，其中 $1 \leq j < k$。于是 $u_{j+1} = u_{2j+2} = b$ 且 $u_j = u_{2j+1} - u_{j+1} = a - b$；同理 $(u_k, u_{k+1}) = (a-b, b)$。

两种情况下，都有同一个有序数对出现在两个不同位置 j 和 k，而 $j \leq m/2 < m$。这与 m 的选取矛盾。所以没有任何正整数有序数对会在两个不同位置相邻出现。

第 (iv) 部分

设 $a > b$，a、b 互质，并假设 (a, b) 不是数列中的一对相邻项。那么 $a - b$ 和 b 都是正整数，而且互质：$a - b$ 与 b 的任何公因数也整除 $(a-b) + b = a$，所以它是 a 与 b 的公因数，必然是 1。

若在某处 $a - b$ 之后紧接 b，例如 $(u_k, u_{k+1}) = (a-b, b)$，则由 $(*)$

$$(u_{2k+1}, u_{2k+2}) = \big((a-b) + b,\ b\big) = (a, b),$$

与对 (a, b) 的假设矛盾。所以 $(a-b, b)$ 也是一对不以相邻项出现的互质数对，而它的和为 $a < a + b$。

$a < b$ 时的相应结果：*a 和 $b - a$ 是互质的正整数，它们不会以 $b - a$ 紧接 a 的方式相邻出现，而且它们的和 b 小于 $a + b$*。证明相同：a 与 $b - a$ 的公因数整除 $a + (b - a) = b$；而若 $(u_k, u_{k+1}) = (a, b-a)$，则 $(u_{2k}, u_{2k+1}) = (a,\ a + (b-a)) = (a, b)$。

第 (v) 部分

由于每一项都是正整数，$f(n) = u_n / u_{n+1}$ 是正有理数（rational），所以值域（range）包含于正有理数之中。我们证明每个正有理数都会被取到，而且只取到一次。

每个正有理数都在值域之内。把一个正有理数写成最简分数（lowest terms）p/q，其中 p、q 是互质的正整数。我们断言每个互质数对 (p, q) 都会以 (u_n, u_{n+1}) 的形式在某个 n 出现。若不然，在没有出现的互质数对中，选取 $a + b$ 最小的一对 (a, b)。不可能有 $a = b$：此时互质迫使 $a = b = 1$，而 $(1, 1)$ 在 $n = 1$ 出现。所以 $a > b$ 或 $a < b$，而第 (iv) 部分给出一对没有出现、和更小的互质数对。这与最小性矛盾，所以每个互质数对 (p, q) 都会出现，设在位置 n，于是 $f(n) = p/q$。

f 是一对一（*one-to-one*）的。假设 $f(m) = f(n)$。由第 (ii) 部分，u_m/u_{m+1} 和 u_n/u_{n+1} 都是分母为正的最简分数。一个正有理数只有一种这样的表示，所以 $u_m = u_n$ 且 $u_{m+1} = u_{n+1}$。由第 (iii) 部分，同一个有序数对不能在两个不同位置出现，所以 $m = n$。

因此 f 是由正整数到正有理数的双射（bijection），故有反函数（inverse）f^{-1}：给定最简分数 p/q，$f^{-1}(p/q)$ 就是 p 之后紧接 q 的唯一位置。例如 3 只在位置 10 紧接 5，所以 $f^{-1}(\frac{3}{5}) = 10$。

验算

- 所列各项给出数对 $(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,2), (2,3), (3,1), (1,4), \ldots$：第一对之后，奇数下标的项都较大；所有数对都互质；没有数对重复。
- 对 3/5 执行第 (iv) 部分的递降：$(3,5) \to (3,2) \to (1,2) \to (1,1)$。再用 $(*)$ 往回推：位置 1 的 $(1,1)$ 给出位置 2 的 $(1,2)$、位置 5 的 $(3,2)$ 和位置 10 的 $(3,5)$；确实 $u_{10} = 3$，$u_{11} = 5$。
- 用电脑检查首二百万项，证实了第 (i)–(iii) 部分，并发现每个满足 $p + q \leq 21$ 的互质数对 (p,q) 都恰好出现一次。

常见错误

- 在第 (ii) 和第 (iii) 部分忘记另行排除第一对 $(1,1)$：它是每次递降的基本情况。
- 在第 (iii) 部分，未加论证便假设两个位置的奇偶性相同；正是第 (i) 部分迫使这一点成立。
- 在第 (v) 部分只证明值域是全体正有理数。要有反函数，还需要 f 是一对一的，而这要同时用到第 (ii) 和第 (iii) 部分。

STEP 之外

这就是 Stern 双原子数列（Stern's diatomic sequence），而列出 u_n/u_{n+1} 便得到有理数的 Calkin–Wilf 枚举（Calkin–Wilf enumeration）：一个 $\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{Q}^+$ 之间的显式双射，具体地说明有理数是可数的（countable）。第 (iv) 和第 (v) 部分的递降，正是欧几里得算法（Euclid's algorithm）的减法形式；而树中由 $(1,1)$ 到 (p,q) 的路径，编码了 p/q 的连分数（continued fraction）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）对欧几里得算法和连分数有精彩的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。