详细解答

# STEP III 2020，第 7 题

纯数学 · 二阶微分方程

**STEP III 2020，第 7 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

## 关键思路

第 (i) 部分说明，二阶线性方程（second-order linear equation）有时可以因式分解（factorise）成两个一阶线性方程，而每一个都可以用积分因子（integrating factor）求解。第 (ii) 部分的工作是找出这个分解：比较系数（matching coefficients）会得出一条关于 g 的非线性（non-linear）一阶方程，而一个幂函数形式（power-law）的猜测就能解出它。之后只需依次解两条一阶方程，并在过程中代入初始条件（initial conditions）。

## 解答

### 第 (i) 部分

由第二条方程可以把 $u$ 用 $y$ 表示：

$$u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{g}(x)\, y.$$

对其求导，并对 $\mathrm{g}(x)y$ 使用乘积法则（product rule），得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{g}'(x)\, y + \mathrm{g}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

把两者代入 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)u = \mathrm{h}(x)$：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{g}'(x)\, y + \mathrm{g}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)\, y = \mathrm{h}(x),$$

再把含 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的项和含 $y$ 的项分别合并，便正好得到方程 (1)。

**第 (ii) 部分**

**g 的方程。** 比较 (2) 与 (1)，我们需要

$$\mathrm{g}(x)+\mathrm{f}(x)=1+\frac{4}{x},\qquad \mathrm{g}'(x)+\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2},\qquad \mathrm{h}(x)=4x+12.$$

由第一式得 $\mathrm{f}=1+\frac{4}{x}-\mathrm{g}$；代入第二式即可消去 f：

$$\mathrm{g}'(x)+\Big(1+\frac{4}{x}\Big)\mathrm{g}(x)-(\mathrm{g}(x))^2=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}.$$

这就是所求的关于 g 的一阶方程。

**幂函数形式的解。** 设 $\mathrm{g}(x)=kx^n$，则左边为

$$knx^{n-1}+kx^n+4kx^{n-1}-k^2x^{2n}.$$

? **想一想** 在未知道 $k$ 之前，应如何选取 $n$?

留意 $x$ 的幂次。右边只含 $x^{-1}$ 和 $x^{-2}$，所以 $x^n$、$x^{n-1}$ 和 $x^{2n}$ 这些幂次都只能产生这两项。取 $n=-1$ 正好做到：$x^n=x^{-1}$，而 $x^{n-1}$ 和 $x^{2n}$ 都是 $x^{-2}$。左边于是变成

$$\frac{k}{x}+\frac{-k+4k-k^2}{x^2}=\frac{k}{x}+\frac{3k-k^2}{x^2}.$$

比较 $x^{-1}$ 项得 $k=2$，此时 $3k-k^2=6-4=2$，与 $x^{-2}$ 项亦吻合。因此

$$n=-1,\quad k=2:\qquad \mathrm{g}(x)=\frac{2}{x},\qquad \mathrm{f}(x)=1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x}=1+\frac{2}{x}.$$

**解方程 (2)。** 根据第 (i) 部分，(2) 现在等价于以下一对方程：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\Big(1+\frac{2}{x}\Big)u=4x+12,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=u.$$

由于条件是在 $x=1$ 处给出，我们在 $x>0$ 上求解。

*关于 $u$ 的方程。*积分因子为 $\exp\int(1+\frac{2}{x})\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x+2\ln x}=x^2\mathrm{e}^x$，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\mathrm{e}^xu)=(4x^3+12x^2)\,\mathrm{e}^x.$$

右边正好是 $4x^3\mathrm{e}^x$ 的导数（乘积法则），所以

$$x^2\mathrm{e}^xu=4x^3\mathrm{e}^x+C,\qquad u=4x+\frac{C\mathrm{e}^{-x}}{x^2}.$$

$u$ 在 $x=1$ 的值由初始条件得出：$u=y'+\frac{2}{x}y=-3+2\times5=7$。于是 $4+C\mathrm{e}^{-1}=7$，得 $C=3\mathrm{e}$，以及

$$u=4x+\frac{3\mathrm{e}^{1-x}}{x^2}.$$

关于 $y$ 的方程。积分因子为 $\mathrm{e}^{2\ln x} = x^2$，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2y) = x^2u = 4x^3 + 3\mathrm{e}^{1-x}, \qquad \text{因此} \qquad x^2y = x^4 - 3\mathrm{e}^{1-x} + D.$$

在 $x = 1$ 处：$5 = 1 - 3 + D$，所以 $D = 7$。因此

$$\boxed{y = x^2 + \frac{7 - 3\mathrm{e}^{1-x}}{x^2}}.$$

这里用了 $y(1) = 5$，而求 $C$ 时用了 $y'(1) = -3$，所以两个条件都成立。

## 验算

- 在 $x = 1$ 处：$y = 1 + 7 - 3 = 5$。求导得 $y' = 2x - 14x^{-3} + 3\mathrm{e}^{1-x}x^{-2} + 6\mathrm{e}^{1-x}x^{-3}$，在 $x = 1$ 处为 $2 - 14 + 3 + 6 = -3$。
- 特解部分（particular part）$y = x^2$ 本身应满足 (2)：$2 + (1 + \frac{4}{x})2x + (\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})x^2 = 2 + 2x + 8 + 2x + 2 = 4x + 12$。确实如此。
- 用电脑把方框中的 $y$ 在 $x = 0.3$ 至 $x = 5$ 之间的许多点代入 (2)，两边在数值微分误差（约 $10^{-5}$）范围内一致。

## 常见错误

- 直接把 $y'(1) = -3$ 当作 $u$ 的初始值。$u$ 的初始值是 $y' + \mathrm{g}y = 7$，而不是 $-3$。
- 在第 (i) 部分漏掉 $\mathrm{g}'(x)$ 项：g 依赖于 $x$，所以 $\mathrm{g}y$ 必须用乘积法则求导。
- 在两个步骤之一漏掉积分常数。总共有两个常数，正好对应两个初始条件。

## STEP 之外

这就是把微分算子（differential operator）因式分解的想法：$(D + \mathrm{f})(D + \mathrm{g})y = \mathrm{h}$，其中 $D$ 表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$。由于 g 依赖于 $x$，这两个因子不可交换（commute），这正是交叉项 $\mathrm{g}'$ 出现的原因。我们为 g 找到的方程是一条*黎卡提方程*（Riccati equation），以黎卡提（Riccati）命名。黎卡提方程是非线性的，但只要知道一个解，就足以把线性二阶问题化为两个一阶问题，正如本题所示。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵盖积分因子、降阶法（reduction of order）及黎卡提方程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。