详细解答

# STEP III 2020，第 6 题

纯数学 · 极坐标曲线与面积

**STEP III 2020，第 6 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

## 关键思路

三个部分都建基于同一个函数 $\cos\theta + \sqrt{\cos 2\theta}$。$C_2$ 的方程是关于 $r$ 的二次方程（quadratic），其两个根为 $\cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}$。因此 $C_2$ 就是 $C_1$（较大的根）再加上第二条位于内侧的分支（较小的根），而两条分支在判别式（discriminant）$\cos 2\theta$ 等于零之处相接。掌握了这一点，两条分支之间的面积便化为单一个积分，因为 $r_+^2 - r_-^2$ 可以因式分解。

## 解答

### 第 (i) 部分

设 $y = \cos x + \sqrt{\cos 2x}$。它恰好在 $\cos 2x \geq 0$ 时为实数，而在给定区间上，这正是整个 $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$。此函数是偶函数（even function），所以图像对称于 $y$ 轴。

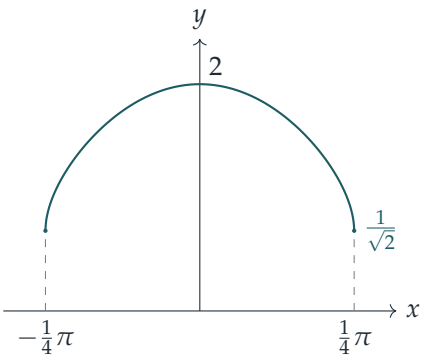
数值。在 $x = 0$ 时，$y = 2$。在 $x = \pm\frac{1}{4}\pi$ 时，$\cos 2x = 0$，而 $y = \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$。

斜率。当 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sin x - \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} < 0,$$

因为在该范围内两项皆为负。所以当 $x$ 由 0 增至 $\frac{1}{4}\pi$ 时，$y$ 由 2 递减至 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，最大值位于 $(0, 2)$。当 $x \to \frac{1}{4}\pi^-$ 时，$\sqrt{\cos 2x} \to 0^+$ 而 $\sin 2x \to 1$，故 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to -\infty$：曲线以铅垂切线（tangent）到达端点。

$x = 0$ 附近。利用 $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ 及 $\sqrt{\cos 2x} \approx \sqrt{1 - 2x^2} \approx 1 - x^2$，得 $y \approx 2 - \frac{3}{2}x^2$，是一个平滑的极大点。




**第 (ii) 部分**

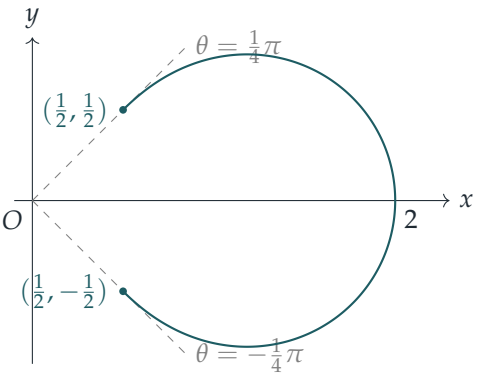
现在同一个函数给出在方向 $\theta$ 上与原点的距离 $r$。$C_1$ 的端点位于 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$、$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$，即直角坐标点 $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$。在 $\theta = 0$ 时，曲线位于 $(2,0)$，是离 $O$ 最远的点。由于 $r$ 是 $\theta$ 的偶函数，$C_1$ 对称于初始线（initial line）。

> **想一想** 对极坐标曲线（polar curve）而言，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 为无限大代表甚么？

由第 (i) 部分可知，当 $\theta \to \frac{1}{4}\pi^-$ 时，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta \to -\infty$。在该端附近，$r$ 变化很大而 $\theta$ 几乎不变，所以曲线是沿着径向直线 $\theta = \frac{1}{4}\pi$（即直线 $y = x$）移动。由于 $r$ 递减，曲线是沿 $y = x$ 朝向原点到达 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 的。特别地，高度 $y = r\sin\theta$ 必须在到达端点之前取得最大值。事实上

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

在 $\theta = 0$ 附近为正，而当 $\theta \to \frac{1}{4}\pi$ 时趋向 $-\infty$。（最大高度约为 0.81，出现在 $\theta \approx 34°$。）因此 $C_1$ 是一道经过 $(2,0)$ 的拱形，向上鼓出超过 $y = \frac{1}{2}$，再回落至 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，并在该处与直线 $y = x$ 相切；轴下方则是其镜像。



### 第 (iii) 部分

*两条分支。*把方程视为关于 $r$ 的二次方程：

$$r^2 - 2r\cos\theta + \sin^2\theta = 0 \iff r = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}.$$

记 $r_\pm = \cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}$。外侧分支 $r_+$ 正是 $C_1$。内侧分支满足 $r_- \geq 0$，因为 $\cos^2\theta \geq \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$，且只在 $\sin\theta = 0$ 时取等号。所以 $r_-$ 是一条真正的极坐标曲线，而且只在 $\theta = 0$ 时到达原点。

*在 $\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ 处。*此时 $\cos 2\theta = 0$，所以二次方程有重根（repeated root）：

$$r = \cos\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

两条分支都经过 $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$。

*$r$ 很小时。*若 $r$ 很小，则 $r^2$ 相对于 $2r\cos\theta$ 可以忽略，而 $\theta$ 也必须很小，因为 $\sin^2\theta = 2r\cos\theta - r^2$ 很小。于是 $2r\cos\theta \approx \sin^2\theta$，再利用 $\cos\theta \approx 1$、$\sin\theta \approx \theta$，

$$r \approx \frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta} \approx \tfrac{1}{2}\theta^2,$$

即为所求。（等价地，$r_- \approx (1 - \frac{1}{2}\theta^2) - (1 - \theta^2) = \frac{1}{2}\theta^2$。）

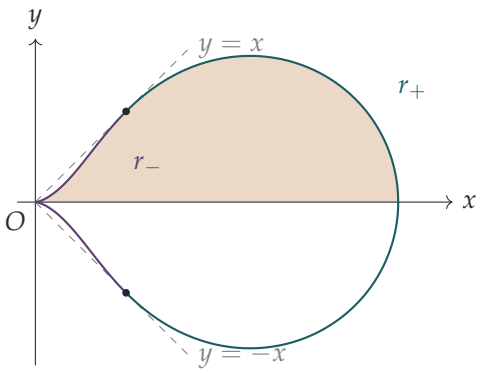
*$r = 0$ 附近的形态。*此时 $x = r\cos\theta \approx \frac{1}{2}\theta^2$，$y = r\sin\theta \approx \frac{1}{2}\theta^3$，所以 $y^2 \approx 2x^3$。因此内侧分支从 $x > 0$ 的一侧、自上方及下方进入原点，并与初始线相切，在 $O$ 处形成一个指向左方的尖点（cusp）。

*$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ 附近的形态。*对方程进行隐函数微分（implicit differentiation），

$$(2r - 2\cos\theta)\,\mathrm{d}r + (2r\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{\cos\theta - r}{\sin\theta\,(r + \cos\theta)}.$$

在 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$、$\theta = \frac{1}{4}\pi$ 处，分子为 0 而分母不为零，所以 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r = 0$。此外，在整条曲线上 $\theta \leq \frac{1}{4}\pi$。因此 $\theta$ 在该处取得最大值，而曲线与径向直线 $y = x$ 相切。外侧分支沿 $y = x$ 朝 $O$ 而来，内侧分支沿 $y = x$ 背离 $O$ 而去，两者在 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 平滑地相接，并没有角点。由对称性，$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 处亦然。

所以 $C_2$ 是一条闭曲线，对称于初始线，形如一滴泪珠，其尖端就是 $O$ 处的尖点。它的外缘是 $C_1$，内缘则由 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 向下进入 $O$ 处的尖点，再出来到达 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$。




（绘图时使用 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u$，这使得 $\sqrt{\cos 2\theta} = \cos u$。让 $u$ 走一整圈，便能描出整条 $C_2$，而不会出现无限大的斜率。）

*面积。*当 $0 \le \theta \le \frac{1}{4}\pi$ 时，角度为 $\theta$ 的射线恰好在 $r_- \le r \le r_+$ 时位于 $C_2$ 之内。所以阴影部分的面积是两个极坐标扇形（sector）之差：

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}\left(r_+^2 - r_-^2\right) \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(r_+ - r_-)(r_+ + r_-)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\cos 2\theta}\cdot 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/4} \cos\theta\sqrt{1-2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

作代换（substitution）$\sqrt{2}\sin\theta = \sin u$，于是 $\sqrt{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \cos u\,\mathrm{d}u$，而当 $\theta$ 由 0 变至 $\frac{1}{4}\pi$ 时，$u$ 由 0 变至 $\frac{1}{2}\pi$：

$$A = 2\int_0^{\pi/2} \cos u\cdot\frac{\cos u}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

即为所求结果。（等价地，代换 $s = \sqrt{2}\sin\theta$ 把积分化为 $\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,\mathrm{d}s$，即单位圆盘（unit disc）四分之一面积的 $\sqrt{2}$ 倍。）

## 验算

- 在 $\theta = 0$ 时，$r_\pm = 1 \pm 1$，得出点 $(2,0)$ 和 $O$，与草图吻合。
- 在 $\theta = 0.01$ 时，$r_- = \cos 0.01 - \sqrt{\cos 0.02} \approx 5.0002\times 10^{-5}$，对比 $\frac{1}{2}\theta^2 = 5\times 10^{-5}$。
- 数值上，$\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.11072$，而直接在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上对 $\frac{1}{2}(r_+^2 - r_-^2)$ 作数值积分，得出的值准确至小数点后六位相同。
- 粗略估界：$C_2$ 的上半部位于矩形 $[0,2]\times[0,0.81]$ 之内，其面积约为 1.62；而它包含以 $(\frac{1}{2},0)$、$(2,0)$、$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 为顶点的三角形，面积为 0.375。数值 1.11 合理地落在两者之间。

## 常见错误

- 在 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 处把 $C_1$ 画成有角点，或画成曲线穿过 $y = x$：$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 为无限大，表示曲线在该处与径向直线相切。
- 在 $O$ 处画成平滑的圆头而非尖点：$y^2 \approx 2x^3$ 正是典型的尖点形状。
- 只计算 $\int \frac{1}{2} r_+^2 \, \mathrm{d}\theta$，这是直至 $C_1$ 的面积，连内侧分支之内的空心区域也包括在内。

## STEP 之外

原点附近的曲线 $y^2 = 2x^3$ 是一条半立方抛物线（semicubical parabola），是尖点的标准例子。每当一个平滑的参数化（parametrisation）在某一时刻速度为零，尖点便会出现：这里 $(x, y) \approx (\frac{1}{2}\theta^2, \frac{1}{2}\theta^3)$ 在 $\theta = 0$ 处的导数为零。为代数曲线上这类奇点分类，正是代数几何（algebraic geometry）的起点。极坐标曲线及其面积亦自然地引向格林定理（Green's theorem），它把一个封闭区域的面积表示为沿其边界的线积分（line integral）。若想从几何角度认识这类曲线，可以参阅 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。