详细解答

STEP III 2020，第 5 题

纯数学 · 部分分式

STEP III 2020，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

开首的恒等式其实就是变了装的有限等比级数（geometric series），而正是它把 $(1-(x/k)^n)/(x-k)$ 化成一个明确的多项式。这样便可得到 $1/(x^n(x-k))$ 完整的部分分式分解（partial-fraction decomposition），而无须进行繁重的系数比较。接着求导，便得出含重复因子（repeated factor）$(x-k)^2$ 的分解；最后的积分只是其中一个特例，当中每一项都可以直接积分。

解答

开首的恒等式

展开右方，并把它拆成两个和：

$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{r=1}^{n} x^{n-r}y^{r-1} &= \sum_{r=1}^{n} x^{n-r+1}y^{r-1} - \sum_{r=1}^{n} x^{n-r}y^{r} \\ &= (x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1}) - (x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n) \\ &= x^n - y^n,\end{aligned}$$

这是因为除了 x^n（来自第一个和中 $r=1$ 的项）和 y^n（来自第二个和中 $r=n$ 的项）之外，每一项都在两个括号中各出现一次，因而互相抵消。

第 (i)(a) 部分

把 $\mathrm{F}(x) = \dfrac{A}{x-k} + \dfrac{\mathrm{f}(x)}{x^n}$ 两边乘以 $x^n(x-k)$，得

$$1 = Ax^n + \mathrm{f}(x)(x-k).$$

这是多项式之间的恒等式，对所有 $x \neq 0, k$ 成立，因此对所有 x 都成立（在无限多个点上相等的两个多项式必然相同）。代入 $x = k$ 得 $1 = Ak^n$，所以 $A = 1/k^n$（这是容许的，因为 $k \neq 0$）。于是

$$\mathrm{f}(x)(x-k) = 1 - \frac{x^n}{k^n}, \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{1}{x-k}\left(1 - \left(\frac{x}{k}\right)^n\right)$$

对 $x \neq k$ 成立，正如所求。

想一想 怎样才能把它化成分母不含 $x-k$ 的形式?

在开首的恒等式中，以 1 代替 x，以 x/k 代替 y:

$$1 - \left(\frac{x}{k}\right)^n = \left(1 - \frac{x}{k}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{x}{k}\right)^{r-1} = -\frac{x-k}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{r-1}}{k^{r-1}}.$$

除以 $x-k$,

$$\mathrm{f}(x) = -\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{r-1}}{k^{r-1}}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{f}(x)}{x^n} = -\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{k^{r-1}x^{n+1-r}}.$$

（这亦证实了 f 确实是多项式。）现在以 $s = n+1-r$ 重新编号：当 r 取遍 $1, \ldots, n$ 时，它亦同样取遍这些值；此时 $r-1 = n-s$，而这个和变成 $\sum_{s=1}^{n} 1/(k^{n-s}x^s)$。因此

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{k^n(x-k)} - \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{k^{n-r}x^r}.$$

第 (i)(b) 部分

由于 $x^n\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{x-k}$，用乘积法则（product rule）对两边求导，得

$$nx^{n-1}\mathrm{F}(x) + x^n\mathrm{F}'(x) = -\frac{1}{(x-k)^2}.$$

除以 $-x^n$（这没有问题，因为 $x \neq 0$）:

$$\frac{1}{x^n(x-k)^2} = -\frac{n}{x}\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}'(x).$$

由 (a) 部分,

$$-\frac{n}{x}\mathrm{F}(x) = -\frac{n}{xk^n(x-k)} + \sum_{r=1}^{n}\frac{n}{k^{n+1-r}x^{r+1}},$$

而把 (a) 部分的结果逐项求导，得

$$-\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{k^{n-r}x^{r+1}} = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \sum_{r=1}^{n}\frac{r}{k^{n+1-r}x^{r+1}}.$$

两式相加，两个和合并后得

$$\frac{1}{x^n(x-k)^2} = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \frac{n}{xk^n(x-k)} + \sum_{r=1}^{n}\frac{n-r}{k^{n+1-r}x^{r+1}},$$

这就是所求的结果。

第 (ii) 部分

在 (b) 部分中取 $n=3$ 及 $k=1$。和式中 $r=3$ 的项为零，于是

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{x(x-1)}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}.$$

中间一项还需再拆一次：$\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$。在 $[2,N]$ 上所有项都连续，且 $x-1>0$，因此在该区间上的一个原函数（antiderivative）是

$$G(x)=-\frac{1}{x-1}-3\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)-\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2},$$

而

$$\int_2^N\frac{1}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x=G(N)-G(2).$$

想一想 为甚么必须把两个对数放在一起?

分开来看，$-3\ln(N-1)$ 和 $+3\ln N$ 各自趋向无限大，所以不能逐项取极限。合并后，当 $N\to\infty$ 时 $\ln((N-1)/N)=\ln(1-\frac{1}{N})\to\ln 1=0$，因为 ln 在 1 处连续。$G(N)$ 的其余三项显然都趋向 0，所以 $G(N)\to 0$。

最后，

$$G(2)=-1-3\ln\tfrac{1}{2}-1-\tfrac{1}{8}=3\ln 2-\tfrac{17}{8},$$

所以

$$\lim_{N\to\infty}\int_2^N\frac{1}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{17}{8}-3\ln 2.$$

验算

- 由于被积函数为正，答案必须是正数：确实 $\frac{17}{8}-3\ln 2\approx 2.1250-2.0794=0.0456$。
- 答案亦应该很小：被积函数在 $x=2$ 时为 $\frac{1}{8}$，之后大约以 x^{-5} 的速度递减。粗略地以 $\frac{1}{8}(2/x)^5$ 作上界，可知积分最多为 $\int_2^\infty 4x^{-5}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{16}$。数值积分亦证实其值为 $0.045558\ldots$，准确至多个小数位。
- 在 (b) 部分中试取 $n=1$。和式为零（它唯一的一项有 $n-r=0$），而右方为 $\dfrac{1}{k(x-k)^2}-\dfrac{1}{xk(x-k)}=\dfrac{x-(x-k)}{xk(x-k)^2}=\dfrac{1}{x(x-k)^2}$，与预期一致。

常见错误

- 把 $1-x/k$ 写成 $-(x-k)/k$ 时弄错正负号。

- 在 (a) 部分忘记把和式重新编号，结果 k 和 x 的幂次与目标不符。
- 把 $\ln\big((x-1)/x\big)$ 拆成两个对数，然后声称积分发散，或者写出“$\infty-\infty=0$”。

STEP 之外

你所建立的，正是对形如 x^n 和 $(x-k)^m$ 的因子的一般部分分式分解；对 x 求导（或对根 k 求导）是产生重复因子项的标准方法。判断无限区间上的积分是否收敛（如第 (ii) 部分），是大学第一门分析课程中瑕积分（improper integrals）的课题。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对这类极限有细致的处理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。