详细解答

STEP III 2020，第 4 题

纯数学 · 反射矩阵与旋转矩阵

STEP III 2020，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

开首那个结果，其实就是整道题目的化身。减去 $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ 会把一点直接垂直移到平面上，所以减去*两倍*这个量，就会把它移到平面另一边同样距离之处，这正是反射（reflection）。一旦把反射写成 $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}-2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$，它的矩阵（matrix）、绕 $\mathbf{n}$ 的半转（half-turn），以及两者的乘积，都只需很少计算便可得出。

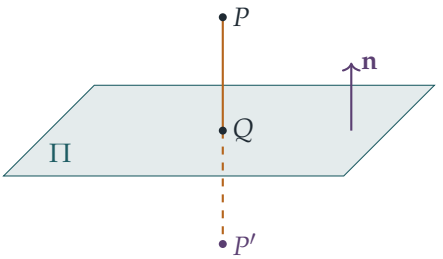
解答

开首的结果

设 $\mathbf{q}=\mathbf{x}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$。由于 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$，

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})=0,$$

所以 Q 位于 Π 上。此外，$\overrightarrow{PQ}=\mathbf{q}-\mathbf{x}=-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$，是法向量（normal）$\mathbf{n}$ 的倍数。由于 P 不在 Π 上（因此 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}\neq 0$），这个向量不是零向量。故此 PQ 垂直于 Π，得证。



这幅图也显示了我们的方向：P 在 Π 中的镜像 P' 位于 Q 另一边，与 Q 的距离等于 P 在

Q 上方的距离，所以它的位置向量（position vector）是

$$\mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}.$$

（若 P 在 Π 上，这条公式给出 P 本身，同样正确。）

第 (i) 部分

取 $\mathbf{n} = (a,b,c)^{\mathsf{T}}$，由于 $a^2+b^2+c^2 = 1$，它是单位法向量（unit normal）。对于 $\mathbf{i}$，有 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{n} = a$，所以

$$T(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 2a\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2a^2\\-2ab\\-2ac\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b^2+c^2-a^2\\-2ab\\-2ac\end{pmatrix},$$

其中第一个分量用了 $1 = a^2+b^2+c^2$。这就是所求的像。同理，利用 $\mathbf{j}\cdot\mathbf{n} = b$ 及 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = c$，

$$T(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix}-2ab\\a^2+c^2-b^2\\-2bc\end{pmatrix}, \qquad T(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix}-2ac\\-2bc\\a^2+b^2-c^2\end{pmatrix}.$$

$\mathbf{M}$ 的各行（column）就是 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 的像，所以

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}b^2+c^2-a^2 & -2ab & -2ac\\ -2ab & a^2+c^2-b^2 & -2bc\\ -2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2\end{pmatrix} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}.$$

第 (ii) 部分

把已知矩阵与 $\mathbf{M}$ 对比，并把各对角元素写成 $1-2a^2$、$1-2b^2$、$1-2c^2$：

$$1-2a^2 = 0.64, \quad 1-2b^2 = 0.36, \quad 1-2c^2 = 0 \implies a^2 = 0.18, \quad b^2 = 0.32, \quad c^2 = 0.5.$$

所以 $|a| = \frac{3}{5\sqrt{2}}$、$|b| = \frac{4}{5\sqrt{2}}$ 及 $|c| = \frac{5}{5\sqrt{2}}$。

? **想一想** 对角线只给出 a^2,b^2,c^2。我们怎样确定正负号?

非对角元素给出各乘积：

$$-2ab = 0.48, \quad -2ac = 0.6, \quad -2bc = -0.8 \implies ab = -0.24, \quad ac = -0.3, \quad bc = 0.4.$$

所以 b 与 c 同号，而 a 与它们异号。把 (a,b,c) 换成 $(-a,-b,-c)$ 不会改变任何东西（仍是同一个平面），所以可取 $c>0$，得

$$(a,b,c) = \tfrac{1}{5\sqrt{2}}(-3,\,4,\,5).$$

这些值给出 $ab = -\frac{12}{50}$、$ac = -\frac{15}{50}$ 及 $bc = \frac{20}{50}$，因此全部六个独立元素都吻合。两边乘以 $-5\sqrt{2}$，平面为

$$3x - 4y - 5z = 0.$$

第 (iii) 部分

把任何向量分拆为 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})$，即沿轴的部分加上垂直于轴的部分（由开首的结果可知）。绕轴旋转 π 会保持第一部分不变，并把第二部分反向，所以

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - (\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}) = 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{x}.$$

这正是 $-T(\mathbf{x})$。因此 $\mathbf{N} = 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} - \mathbf{I} = -\mathbf{M}$，即

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & b^2 - a^2 - c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & c^2 - a^2 - b^2 \end{pmatrix}.$$

第 (iv) 部分

> **想一想** 这里我们需要把两个以 a、b、c 表示的 3×3 矩阵相乘吗?

不需要。由 (iii)，$\mathbf{NM} = -\mathbf{M}^2$。在同一平面中反射两次，会把每一点带回原处，所以 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$。（从代数上看，由于 $\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\mathbf{n} = 1$，$(\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}})^2 = \mathbf{I} - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} + 4\mathbf{n}(\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\mathbf{n})\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}$。）因此

$$\mathbf{NM} = -\mathbf{I},$$

它把每个 $\mathbf{x}$ 映射到 $-\mathbf{x}$。这是关于原点的反射，又称为中心反演（central inversion），或以原点为中心、比例因子为 -1 的放大（enlargement）。留意它完全不依赖 a、b 或 c。

验算

- $\mathbf{M}$ 的每一行都应是单位向量。以第一行为例，$(b^2 + c^2 - a^2)^2 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 = (b^2 + c^2 + a^2)^2 = 1$。
- 在 (ii) 中，法向量 $(3, -4, -5)$ 应被映射到其负向量。已知矩阵把它映射到 $(1.92 - 1.92 - 3,\ 1.44 - 1.44 + 4,\ 1.8 + 3.2) = (-3, 4, 5)$。正确。
- 取 $\mathbf{n} = \mathbf{k}$，则 $\mathbf{M} = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$，即在 $z = 0$ 中的反射，而 $\mathbf{N} = \operatorname{diag}(-1, -1, 1)$，即绕 z 轴的半转。两者的乘积显然是 $-\mathbf{I}$。
- 用电脑以 1000 个随机单位向量 $\mathbf{n}$ 验算，确认了 $\mathbf{M}$ 的公式、$\mathbf{N}$ 保持 $\mathbf{n}$ 不变并把垂直向量反向，以及 $\mathbf{NM} = -\mathbf{I}$。(ii) 中的矩阵亦在 10^{-15} 的误差内重现。

常见错误

- 把 $\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ 当作反射。这其实是垂足（foot of the perpendicular），漏了因子 2。
- 在 (ii) 中，从平方根独立地选取 a, b, c 的正负号。只有非对角元素才能确定它们之间的相对正负号。
- 说 $\mathbf{NM}$ 是“恒等矩阵”。反射的行列式（determinant）是 -1，旋转的行列式是 $+1$，所以乘积的行列式是 -1。在三维中 $\det(-\mathbf{I}) = -1$，两者一致。

STEP 之外

矩阵 $\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$ 称为豪斯霍尔德反射（*Householder reflection*）。数值线性代数经常用它把矩阵化为三角形式，而且 n 维中的每个正交矩阵（orthogonal matrix）都是最多 n 个这类反射的乘积。第 (iv) 部分是这个结构的一个小例子：在 $\mathbb{R}^3$ 中，半转与在垂直平面中的反射复合，得出 $-\mathbf{I}$。关于正交矩阵、投影和反射，可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。