详细解答

STEP III 2020，第 3 题

纯数学 · 几何中的复数

STEP III 2020，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

在复数平面（complex plane）上，以 a 为中心、转角为 θ 的旋转（rotation）不过就是 $z \mapsto a + (z-a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，因此 G_{AB} 是 a 和 b 的一个明确的线性组合（linear combination）。一旦第 (i) 部分给出这条公式，几何问题便化为代数问题：平行四边形（parallelogram）是顶点所满足的一个线性条件，而等边三角形（equilateral triangle）则是某一边等于另一边转过一个固定角度。整道题目只建基于关于 ω 的幂的几个事实。

解答

全文中，$\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$，故 $\omega^* = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$，并记

$$\rho = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

我们会用到以下三个事实：

$$\omega^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, \qquad \omega^3 = \mathrm{i}, \qquad \omega - \omega^* = 2\mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{6} = \mathrm{i}.$$

第 (i) 部分

顺时针(clockwise)旋转 $\frac{1}{3}\pi$ 相当于乘以 ρ。以 A 为中心旋转，意思是把位移(displacement) $b-a$ 旋转，再加回到 a 上，所以

$$k = a + (b-a)\rho.$$

因此 ABK 的形心（centroid）为

$$g_{ab} = \tfrac{1}{3}(a+b+k) = \tfrac{1}{3}[(2-\rho)\,a + (1+\rho)\,b].$$

接着整理两个系数：

$$2-\rho=\tfrac{3}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{3}\,\omega,$$
$$1+\rho=\tfrac{3}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{3}\,\omega^*.$$

于是

$$g_{ab}=\tfrac{1}{3}(\sqrt{3}\,\omega a+\sqrt{3}\,\omega^* b)=\frac{1}{\sqrt{3}}(\omega a+\omega^* b),$$

此即所求。

第 (ii) 部分

四边形（quadrilateral）$PQRS$（顶点依此次序排列）是平行四边形，当且仅当 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$，即 $q-p=r-s$，亦即

$$p-q+r-s=0.$$

（这等同于说对角线（diagonal）PR 与 QS 有相同的中点（midpoint）。）所以 Q_1 是平行四边形当且仅当 $a-b+c-d=0$，而 Q_2 是平行四边形当且仅当

$$g_{ab}-g_{bc}+g_{cd}-g_{da}=0.$$

对四个点各自运用第 (i) 部分的结果，

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\,(g_{ab}-g_{bc}+g_{cd}-g_{da})&=(\omega a+\omega^* b)-(\omega b+\omega^* c)+(\omega c+\omega^* d)-(\omega d+\omega^* a)\\&=(\omega-\omega^*)a-(\omega-\omega^*)b+(\omega-\omega^*)c-(\omega-\omega^*)d\\&=\mathrm{i}\,(a-b+c-d).\end{aligned}$$

因此

$$g_{ab}-g_{bc}+g_{cd}-g_{da}=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\,(a-b+c-d),$$

由于 $\mathrm{i}/\sqrt{3}\neq 0$，一边为零当且仅当另一边为零。所以 Q_1 是平行四边形当且仅当 Q_2 是平行四边形。

想一想 Q_2 有没有可能满足平行四边形条件，却退化成有两个顶点重合？

有的，在一个特殊情况下会发生。若 ABC 是一个按顺时针标记的等边三角形，那么把 B 绕 A 顺时针旋转便会落在 C 上，因此 G_{AB} 和 G_{BC} 都是 ABC 的形心。把它补成菱形（rhombus）$ABCD$，Q_2 就压扁成一条线段。此时条件 $p-q+r-s=0$ 仍然成立，所以这个等价关系实际上是关于这个向量条件的陈述，而在这类题目中，“平行四边形”指的正是这个条件。

第 (iii) 部分

我们证明 T_2 的某一边（作为向量）等于另一边转过一个固定角度。由第 (i) 部分，

$$\sqrt{3}\,(g_{bc}-g_{ab}) = (\omega b+\omega^* c)-(\omega a+\omega^* b) = -\omega a+\mathrm{i}\,b+\omega^* c,$$
$$\sqrt{3}\,(g_{ca}-g_{bc}) = (\omega c+\omega^* a)-(\omega b+\omega^* c) = \omega^* a-\omega b+\mathrm{i}\,c,$$

每一行都用了 $\omega-\omega^*=\mathrm{i}$。

想一想 哪个数 λ 能把第二个括号变成第一个?

比较 a 的系数，必须有 $\lambda\omega^* = -\omega$，所以 $\lambda = -\omega/\omega^* = -\omega^2 = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}$。同一个 λ 对 b 和 c 亦适用：

$$\lambda\cdot(-\omega) = \omega^3 = \mathrm{i},$$
$$\lambda\cdot\mathrm{i} = -\omega^2\cdot\omega^3 = -\omega^5 = -\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/6} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} = \omega^*.$$

因此，对所有 a、b、c，

$$g_{bc}-g_{ab} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}\,(g_{ca}-g_{bc}).$$

取模（modulus），由于 $|\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}| = 1$，得 $G_{AB}G_{BC} = G_{BC}G_{CA}$。此外，沿 T_2 行进的方向在 G_{BC} 处转过 $\frac{2}{3}\pi$，所以 T_2 在 G_{BC} 处的内角（interior angle）为 $\pi-\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$。一个三角形若有两条相等的边夹着 $\frac{1}{3}\pi$ 的角，便是等腰（isosceles）三角形，其底角为 $\frac{1}{2}(\pi-\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{3}\pi$，所以三个角都是 $\frac{1}{3}\pi$，T_2 是等边三角形。

唯一的例外是 $g_{ca} = g_{bc}$ 的情况，此时上述关系亦给出 $g_{ab} = g_{bc}$，所以 T_2 缩成一点。把 $\omega^* a-\omega b+\mathrm{i}c = 0$ 乘以 ω，得 $a-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}b+\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}c = 0$，这恰好在 ABC 本身是按顺时针标记的等边三角形时发生（正如第 (ii) 部分的备注所述）。其他任何三角形 T_1（包括退化（degenerate）三角形）都给出一个真正的等边三角形 T_2。

验算

- 取 $a=0$、$b=1$。则 $k=\rho$，而 $0,1,\rho$ 的形心为 $\frac{1}{3}(1+\rho) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$。公式给出 $\omega^*/\sqrt{3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{i}$，是同一个数。
- 取 $a=0$、$b=1$、$c=\mathrm{i}$（一个直角三角形），T_2 三个点两两之间的距离都约为 1.1154。以电脑对 10^4 个随机三角形和四边形进行检验，在舍入误差范围内证实了第 (ii) 和第 (iii) 部分的恒等式。

常见错误

- 把 b 绕原点而非绕 A 旋转，写成 $k = b\rho$。

- 用 $e^{+i\pi/3}$ 表示顺时针旋转。顺时针是负方向。
- 在第 (ii) 部分只证明了一个方向。正是因子 $i/\sqrt{3}$ 不为零，才得出“当且仅当”。

STEP 之外

第 (iii) 部分就是拿破仑定理（Napoleon's theorem）。在任意三角形的各边上作等边三角形（这里当 ABC 按逆时针标记时是向外作），它们的形心构成一个等边三角形。复数证明之所以奏效，是因为旋转和形心都是平面的线性映射（linear map）。这正是研究几何中变换群（transformation group）的起点。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）对复数乘法的这种几何观点有十分精彩的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。