详细解答

STEP III 2020，第 2 题

纯数学 · 双曲函数曲线描绘

STEP III 2020，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

进行隐函数求导（implicit differentiation），并反复利用 $\cosh^2 = 1 + \sinh^2$ 把一切化回 sinh 的形式：这样二阶导数的条件便可以因式分解，而其中一个因子正是曲线本身的方程。至于直线 $x + y = a$，代入 $y = a - x$ 并把所有项写成指数形式；要有实数交点，判别式（discriminant）必须非负，由此便得出 $\cosh a$ 的界限。

解答

第 (i) 部分

由于 sinh 是 $\mathbb{R}$ 上的双射（bijection），对每个 x，恰好有一个 y 使 $\sinh y = 2k - \sinh x$。因此 C 是函数 $y = \operatorname{arsinh}(2k - \sinh x)$ 的图像，对所有实数 x 均有定义，我们可以进行隐函数求导：

$$\cosh x + \cosh y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\cosh x}{\cosh y}.$$

由于 $\cosh x \geq 1$，斜率（gradient）永不为零（它总是负数），所以 C 没有驻点（stationary point）。

再求导一次，记 $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，得

$$\sinh x + \sinh y\,(y')^2 + \cosh y\, y'' = 0.$$

代入 $y' = -\cosh x / \cosh y$，并在两边乘以 $\cosh^2 y$：

$$\begin{aligned}\cosh^3 y\, y'' &= -\Big(\sinh x \cosh^2 y + \sinh y \cosh^2 x\Big)\\ &= -\Big(\sinh x\,(1+\sinh^2 y) + \sinh y\,(1+\sinh^2 x)\Big)\\ &= -(\sinh x + \sinh y) - \sinh x \sinh y\,(\sinh y + \sinh x)\\ &= -(\sinh x + \sinh y)(1 + \sinh x \sinh y).\end{aligned}$$

在 C 上，第一个因子等于 $2k$，所以

$$y'' = -\frac{2k\,(1+\sinh x \sinh y)}{\cosh^3 y}.$$

由于 $k > 0$ 且 $\cosh y > 0$，可知 $y'' = 0$ 当且仅当 $1 + \sinh x \sinh y = 0$，此即所求。

? **想一想** 单凭 $y'' = 0$ 足以断定该点是拐点吗?

不足够：我们还需要 y'' 变号。设 $s = \sinh x$ 及 $t = \sinh y$。在 $y'' = 0$ 的点上，我们有 $s + t = 2k$ 及 $st = -1$，所以 s 和 t 是 $u^2 - 2ku - 1 = 0$ 的两个根：

$$u = k \pm \sqrt{k^2+1}.$$

一个根为正，另一个为负；s 可取其中任一个值，t 则取另一个。沿着曲线，$1 + st = 1 + s(2k - s) = -(s^2 - 2ks - 1)$ 是 s 的二次式，有两个单根，所以在每个根处都会变号。由于 $s = \sinh x$ 是 x 的递增函数，y'' 在这两点的确会变号。因此拐点（point of inflection）为

$$\Big(\operatorname{arsinh}(k+\sqrt{k^2+1}),\ \operatorname{arsinh}(k-\sqrt{k^2+1})\Big) \quad \text{及}$$
$$\Big(\operatorname{arsinh}(k-\sqrt{k^2+1}),\ \operatorname{arsinh}(k+\sqrt{k^2+1})\Big).$$

它们互为关于 $y = x$ 的反射，这正合预期，因为 C 的方程对 x 和 y 是对称的。

第 (ii) 部分

在直线上，$y = a - x$。利用 $2\sinh u = \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}$，把 C 的方程乘以 2 后变成

$$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{a-x} - \mathrm{e}^{x-a} = 4k.$$

乘以 e^x 得 $\mathrm{e}^{2x} - 1 + \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{2x-a} = 4k\mathrm{e}^x$，即

$$\mathrm{e}^{2x}(1 - \mathrm{e}^{-a}) - 4k\mathrm{e}^x + (\mathrm{e}^a - 1) = 0,$$

此即所求的方程。

想一想 这样的点存在，对这个方程意味着甚么？

它是 $X = \mathrm{e}^x$ 的二次方程（只要首项系数不为零），而且必须有实根。

首先，$a \neq 0$：若 $a = 0$，方程会退化为 $-4k\mathrm{e}^x = 0$，由于 $k > 0$，这是不可能的。因此 $\cosh a > 1$。

当 $a \neq 0$ 时，首项系数 $1 - \mathrm{e}^{-a}$ 不为零，所以该二次方程有实根，仅当其判别式非负：

$$16k^2 - 4(1 - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^a - 1) \geq 0.$$

而 $(1 - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^a - 1) = \mathrm{e}^a - 2 + \mathrm{e}^{-a} = 2\cosh a - 2$，所以条件为 $16k^2 \geq 8(\cosh a - 1)$，即 $\cosh a \leq 2k^2 + 1$。合起来，

$$1 < \cosh a \leq 2k^2 + 1.$$

所以 C 上每一点的 $x + y$ 都介乎 $-2\operatorname{arsinh} k$ 与 $2\operatorname{arsinh} k$ 之间（因为 $\cosh(2\operatorname{arsinh} k) = 1 + 2\sinh^2(\operatorname{arsinh} k) = 1 + 2k^2$），而且 $x + y \neq 0$。

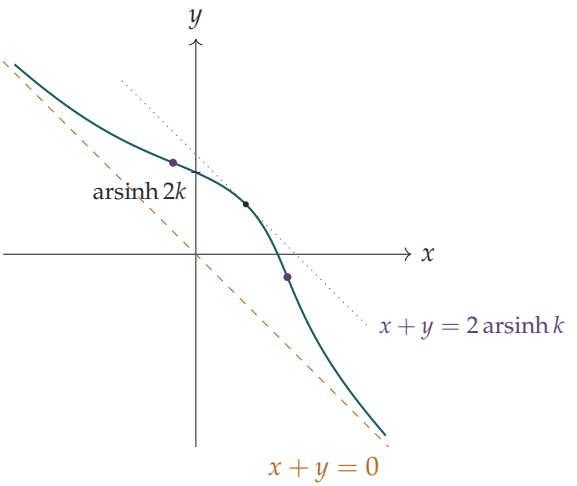
事实上，在 C 上 $x + y > 0$。若 $a < 0$，则 $1 - \mathrm{e}^{-a} < 0$ 且 $\mathrm{e}^a - 1 < 0$，所以该二次方程的三个系数全是负数，因而没有正根 X。（等价地，$\sinh x + \sinh y = 2\sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$，其正负号与 $x + y$ 相同。）最大值 $x + y = 2\operatorname{arsinh} k$ 出现在 $x = y = \operatorname{arsinh} k$，此时判别式为零，直线刚好与 C 相切。

第 (iii) 部分

综合已知的结果：

- C 关于直线 $y = x$ 对称，并只在 $(\operatorname{arsinh} k, \operatorname{arsinh} k)$ 与之相交，该处的斜率为 -1。
- y 对所有 x 均有定义，且斜率总是负数。曲线与坐标轴相交于 $(\operatorname{arsinh} 2k, 0)$ 及 $(0, \operatorname{arsinh} 2k)$。
- $0 < x + y \leq 2\operatorname{arsinh} k$，所以 C 位于直线 $x + y = 0$ 上方、直线 $x + y = 2\operatorname{arsinh} k$ 上或其下方的带状区域内，而后者在 C 位于 $y = x$ 上的那一点与 C 相切。
- 当 $x \to +\infty$，$\sinh y = 2k - \sinh x \to -\infty$，且 $\mathrm{e}^{-y} \approx \mathrm{e}^x - 4k$，所以 $x + y \approx -\ln(1 - 4k\mathrm{e}^{-x}) \approx 4k\mathrm{e}^{-x} \to 0^+$。由对称性，当 $x \to -\infty$ 时情况相同。因此 $x + y = 0$ 是曲线两端的渐近线（asymptote），曲线从上方趋近它。
- 由 y'' 的公式可知，在两个拐点之间，即 $1 + \sinh x \sinh y > 0$ 之处（例如 $y = x$ 上的那一点），曲线是凹的（concave，位于其切线下方）；在两个拐点以外，曲线是凸的（convex）。

下图显示 $k = 1$ 的情况，并标出了拐点。



验算

- 当 $k = 1$，拐点位于 $\left(\operatorname{arsinh}(1+\sqrt{2}), \operatorname{arsinh}(1-\sqrt{2})\right) \approx (1.615, -0.403)$ 及其镜像；在两侧计算 $y = \operatorname{arsinh}(2 - \sinh x)$ 的二阶差分，确认 y'' 在该处变号；在 $-8 \le x \le 8$ 范围内扫描，找不到 y'' 的其他零点。
- 公式 $y'' = -2k(1 + \sinh x \sinh y)/\cosh^3 y$ 在许多随机点、对多个 k 值，都与数值二阶导数吻合。
- 当 $k = 1$ 及 $x = 6$，$x + y \approx 0.00996$，接近预测值 $4\mathrm{e}^{-6} \approx 0.00992$：一如所述，曲线从上方趋近渐近线。
- 在 $x = y = \operatorname{arsinh} k$，$\cosh(x+y) = 1 + 2\sinh^2 x = 1 + 2k^2$：第 (ii) 部分的上界可以达到。

常见错误

- 只得出 $y'' = 0$ 便停下，没有检查 y'' 是否变号。这里它确实变号，但必须说明。
- 忘记排除 $a = 0$，而正是这一点令左边的不等式成为严格不等式。
- 只写出一个拐点。$u^2 - 2ku - 1 = 0$ 的任一个根都可以是 $\sinh x$，因此得出两个关于 $y = x$ 互为镜像的点。

STEP 之外

旋转后的坐标 $u = x + y$、$v = x - y$ 令这条曲线一目了然：恒等式 $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{u}{2}\cosh\frac{v}{2}$ 把 C 化为 $\sinh\frac{u}{2} = k\operatorname{sech}\frac{v}{2}$，即在渐近线 $u = 0$ 上方的单一隆起。选取与对称性相配合的坐标，是大学一年级微积分和线性代数中贯穿始终的主题（把二次型（quadratic form）对角化正是同一个想法）。隐函数曲线，以及方程 $F(x, y) = 0$ 在甚么情况下真正把 y 定义为 x 的光滑函数，是隐函数定理（implicit function theorem）的研究对象；Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）对其背后的单变量分析有严谨的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。