详细解答

STEP III 2020，第 12 题

概率与统计 · 几何分布的独立性

> **STEP III 2020，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

所有随机变量都是独立几何分布随机变量（geometric random variables）对 (X, Y) 的函数，而且 $\mathrm{P}(X = x,\, Y = y) = p^2 q^{x+y-2}$。处理和与差时，最好沿着 (x, y) 网格中的一条直线把这个联合概率（joint probability）加起来；处理最大值与最小值时，则最容易通过累积概率（cumulative probability），例如 $\mathrm{P}(T \le t)$。至于独立性（independence），可留意某个变量是否有一个取值能完全确定另一个变量。

解答

由于 A 一直掷到第一次出现正面为止，当首 $k-1$ 次都是反面而第 k 次是正面时，X 取值 $k \ge 1$：

$$\mathrm{P}(X = k) = pq^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

Y 亦然。两位参与者各自独立掷币，所以 X 与 Y 互相独立，并且

$$\mathrm{P}(X = x,\, Y = y) = p^2 q^{x+y-2} \qquad (x, y \ge 1).$$

有两个事实我们会反复用到：$\mathrm{P}(X > k) = q^k$（首 k 次全是反面），所以 $\mathrm{P}(X \le k) = 1 - q^k$；以及 $1 - q^2 = (1-q)(1+q) = p(1+q)$。

第 (i) 部分

和。S 的取值为 $s \ge 2$。要 $S = s$，需要 $X = x$ 及 $Y = s - x$，其中 $1 \le x \le s-1$。这 $s-1$ 个结果每个的概率都是 $p^2 q^{s-2}$，因此

$$\mathrm{P}(S = s) = (s-1) p^2 q^{s-2}, \qquad s = 2, 3, 4, \ldots$$

最大值。$T \le t$ 当且仅当 $X \le t$ 与 $Y \le t$ 同时成立，所以由独立性得 $\mathrm{P}(T \le t) = (1-q^t)^2$。因此，对 $t \ge 1$，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T=t) &= \mathrm{P}(T \le t) - \mathrm{P}(T \le t-1) = (1-q^t)^2 - (1-q^{t-1})^2 \\ &= [(1-q^t)-(1-q^{t-1})][(1-q^t)+(1-q^{t-1})] \\ &= (q^{t-1}-q^t)(2-q^{t-1}-q^t) \\ &= pq^{t-1}(2-q^{t-1}-q^t),\end{aligned}$$

这里用了 $q^{t-1}-q^t = q^{t-1}(1-q) = pq^{t-1}$。这就是所求的结果。（当 $t=1$ 时，公式给出 $p(1-q)=p^2$，是正确的。）

第 (ii) 部分

差。要 $U=0$，需要对某个 $k \ge 1$ 有 $X=Y=k$：

$$\mathrm{P}(U=0) = \sum_{k=1}^{\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{p(1+q)} = \frac{p}{1+q}.$$

对 $u \ge 1$，要么 $Y = X+u$，要么 $X = Y+u$；这两种情况互斥，而且由对称性可知概率相等，所以

$$\mathrm{P}(U=u) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X=k,\, Y=k+u) = 2\sum_{k=1}^{\infty} p^2 q^{2k+u-2} = \frac{2p^2q^u}{1-q^2} = \frac{2pq^u}{1+q}.$$

最小值。$W > w$ 当且仅当 $X > w$ 与 $Y > w$ 同时成立，所以 $\mathrm{P}(W > w) = q^{2w}$，而对 $w \ge 1$，

$$\mathrm{P}(W=w) = \mathrm{P}(W > w-1) - \mathrm{P}(W > w) = q^{2w-2} - q^{2w} = (1-q^2)\,q^{2(w-1)}.$$

所以 W 本身也服从几何分布，其“成功”概率为 $1-q^2$：A 和 B 各掷一次为一轮，每轮至少出现一次正面的概率是 $1-q^2$。

第 (iii) 部分

若 $S=2$，由于 $X, Y \ge 1$，必然有 $X=Y=1$，于是 $T=1$。所以 $S=2$ 与 $T=3$ 不可能同时发生：

$$\mathrm{P}(S=2 \text{ 且 } T=3) = 0.$$

另一方面，$\mathrm{P}(S=2) = p^2 > 0$，而 $\mathrm{P}(T=3) = pq^2(2-q^2-q^3) > 0$，因为 $0<q<1$ 给出 $q^2+q^3<2$。因此 $\mathrm{P}(S=2)\times\mathrm{P}(T=3) > 0$，两边并不相等。

第 (iv) 部分

U 与 W 互相独立。我们须证明对每个 $u \ge 0$ 及 $w \ge 1$，都有 $\mathrm{P}(U=u, W=w) = \mathrm{P}(U=u)\,\mathrm{P}(W=w)$。知道 U 和 W 两者，就知道较小的值是 w，较大的值是 $w+u$。

想一想 哪些数对 (X,Y) 会给出 $U=u$ 及 $W=w$?

若 $u=0$，唯一的数对是 (w,w)。若 $u\geq 1$，则恰好有两个：$(w,\,w+u)$ 和 $(w+u,\,w)$，每个的概率都是 p^2q^{2w+u-2}。

当 $u=0$，$\mathrm{P}(U=0,\,W=w)=p^2q^{2w-2}$，而

$$\mathrm{P}(U=0)\,\mathrm{P}(W=w)=\frac{p}{1+q}\cdot p(1+q)\,q^{2w-2}=p^2q^{2w-2}.$$

当 $u\geq 1$，$\mathrm{P}(U=u,\,W=w)=2p^2q^{2w+u-2}$，而

$$\mathrm{P}(U=u)\,\mathrm{P}(W=w)=\frac{2pq^u}{1+q}\cdot p(1+q)\,q^{2w-2}=2p^2q^{2w+u-2}.$$

两者在所有情况下都相等，所以 U 与 W 互相独立。

其他各对都不独立。余下的各对是 (S,T)、(S,U)、(S,W)、(T,U) 及 (T,W)。要证明两个变量不独立，只需找到一对取值使得 $\mathrm{P}(A=a,\,B=b)\neq\mathrm{P}(A=a)\,\mathrm{P}(B=b)$ 便足够。

想一想 S 或 T 的哪一个取值能确定其余一切?

事件 $S=2$ 与事件 $T=1$ 是同一个事件 $\{X=Y=1\}$，其概率为 $p^2>0$；在此事件上 $T=1$、$U=0$ 及 $W=1$。由于 $0<p,q<1$，根据第 (i) 及 (ii) 部分的公式，下列清单中 T、U、W 的每个取值都有正概率。所以:

- (S,T)：$\mathrm{P}(S=2,\,T=3)=0\neq\mathrm{P}(S=2)\,\mathrm{P}(T=3)$，见第 (iii) 部分；
- (S,U)：$\mathrm{P}(S=2,\,U=1)=0$，但 $\mathrm{P}(S=2)\,\mathrm{P}(U=1)>0$；
- (S,W)：$\mathrm{P}(S=2,\,W=2)=0$，但 $\mathrm{P}(S=2)\,\mathrm{P}(W=2)>0$；
- (T,U)：$\mathrm{P}(T=1,\,U=1)=0$，但 $\mathrm{P}(T=1)\,\mathrm{P}(U=1)>0$；
- (T,W)：$\mathrm{P}(T=1,\,W=2)=0$，但 $\mathrm{P}(T=1)\,\mathrm{P}(W=2)>0$。

所以在 S、T、U、W 之中，只有 U 与 W 这一对是互相独立的。

验算

- 每个分布的总和都是 1: 例如 $\sum_{t\geq 1}\mathrm{P}(T=t)$ 经裂项相消 (telescoping) 后等于 $\lim(1-q^t)^2=1$，而 $\frac{p}{1+q}+\sum_{u\geq 1}\frac{2pq^u}{1+q}=\frac{p}{1+q}\left(1+\frac{2q}{p}\right)=\frac{p+2q}{1+q}=1$。
- 取 $p=q=\frac{1}{2}$: $\mathrm{P}(T=2)=\frac{1}{4}\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{16}$, 与逐一列出三个结果 $(1,2),(2,1),(2,2)$ 的概率 $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ 吻合。
- 取 $p=q=\frac{1}{2}$，$\mathrm{P}(U=1,\,W=1)=\mathrm{P}\{(1,2),(2,1)\}=\frac{1}{4}$，而 $\mathrm{P}(U=1)\,\mathrm{P}(W=1)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$，正符合独立性的要求。

- 所有公式以及 U 与 W 的独立性，都已用电脑对 $p = 0.3$、0.55 及 0.8 把联合分布加总而得到验证。

常见错误

- 在 $u \geq 1$ 时漏掉 $\mathrm{P}(U = u)$ 中的因子 2，或在 $u = 0$ 时错误地加上它——此时 $X = Y$ 只算一次。
- 尝试直接把各种情况相加来求 $\mathrm{P}(T = t)$，结果把 $X = Y = t$ 重复计算；用累积概率的方法可避免这个问题。
- 以为检查一对取值就能证明独立：证明独立需要对*所有* u 和 w 成立，而只要有一处不成立便足以说明不独立。

STEP 之外

U 与 W 互相独立，正是无记忆性（memoryless property）的离散形式：一旦第一次正面在时间 W 出现，另一位参与者余下的等待时间就是一个全新的几何分布随机变量，与之前等了多久无关。在连续的情况下，对应的结果是：对独立的指数分布（exponential distribution）随机变量而言，最小值与“最大值和最小值之差”互相独立；这是泊松过程（Poisson process）和排队论（queueing theory）的基础。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）对这些概念有深入的发展。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。