详细解答

# STEP III 2020，第 11 题

概率与统计 · 随机变量的函数

**STEP III 2020，第 11 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

## 关键思路

严格递减(strictly decreasing)函数会把不等式反向;又因为 f 是自己的反函数(inverse),我们可以把它同时作用于 $\mathrm{f}(X) \le y$ 的两边,得到一个只关于 $X$ 的事件。期望值(expectation)则由分部积分(integration by parts)求得,这一步把 $\mathrm{f}'$ 换成 f。在第 (ii) 部分, $Z$ 与 $X$ 之间的关系对两个变量是对称的，所以 $Z = \mathrm{f}(X)$，其中 f 是自反函数（self-inverse function），于是可以套用第 (i) 部分。所求的不等式其实只是“方差（variance）为正”这个事实。

## 解答

### 第 (i) 部分

由于 $\mathrm{f}^{-1}$ 在整个 $[a,b]$ 上都有定义，f 是 $[a,b]$ 到自身的双射（bijection），所以 $Y$ 的取值在 $[a,b]$ 之内。固定 $y \in [a,b]$。因为 f 严格递减，把它作用于不等式的两边会使不等式反向，而且 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$。因此，对于 $x \in [a,b]$,

$$\mathrm{f}(x) \le y \iff \mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) \ge \mathrm{f}(y) \iff x \ge \mathrm{f}(y).$$

(反方向的蕴涵同理成立,只需把 f 作用于 $x \ge \mathrm{f}(y)$。)由于 $X$ 在 $[a,b]$ 上均匀分布(uniform),且 $\mathrm{f}(y) \in [a,b]$,

$$\mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}(X \ge \mathrm{f}(y)) = \frac{b - \mathrm{f}(y)}{b-a},$$

此即所求。

求导后，$Y$ 的概率密度函数（probability density function）为

$$g(y) = -\frac{\mathrm{f}'(y)}{b-a} \quad \text{当} a \le y \le b,$$

其余情况下为零。由于 f 递减，这个函数非负。接着，取 $u = y^2$ 及 $\mathrm{d}v = -\mathrm{f}'(y)\,\mathrm{d}y$ 进行分部积分，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y^2) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b y^2(-\mathrm{f}'(y))\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{b-a}\Big[-y^2\mathrm{f}(y)\Big]_a^b + \int_a^b \frac{2y\,\mathrm{f}(y)}{b-a}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{-b^2a + a^2b}{b-a} + \int_a^b \frac{2y\,\mathrm{f}(y)}{b-a}\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中用到 $\mathrm{f}(b) = a$ 及 $\mathrm{f}(a) = b$。第一项等于 $-ab(b-a)/(b-a) = -ab$。把哑变量（dummy variable）$y$ 改记为 $x$，得

$$\mathrm{E}(Y^2) = -ab + \int_a^b \frac{2x\,\mathrm{f}(x)}{b-a}\,\mathrm{d}x.$$

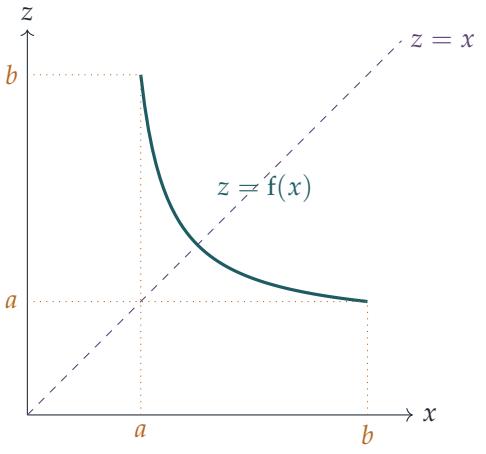
**第 (ii) 部分**

注意由 $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 得 $c = \dfrac{ab}{a+b}$，又因 $\frac{1}{c} > \frac{1}{a}$，所以 $c < a$。解出 $Z$：

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{c} - \frac{1}{X} = \frac{X-c}{cX}, \qquad \text{所以} \qquad Z = \mathrm{f}(X)\text{，其中 } \mathrm{f}(x) = \frac{cx}{x-c}.$$

由于 $x \geq a > c$，分母在 $[a,b]$ 上为正。我们验证 f 满足第 (i) 部分的三个条件。

- $\frac{1}{\mathrm{f}(a)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$，所以 $\mathrm{f}(a) = b$。同理 $\frac{1}{\mathrm{f}(b)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$，所以 $\mathrm{f}(b) = a$。
- $\frac{1}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ 上为正且严格递增，所以 $\mathrm{f}(x)$ 在该区间上严格递减。
- 关系式 $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$ 对 $x$ 与 $z$ 是对称的。所以 $z = \mathrm{f}(x)$ 当且仅当 $x = \mathrm{f}(z)$，即 $\mathrm{f} = \mathrm{f}^{-1}$。




f 的图像由 $(a,b)$ 延伸至 $(b,a)$，并且关于直线 $z = x$ 对称——自反函数理应如此。

**想一想** 为甚么除了 $\mathrm{E}(Z^2)$ 之外，还要求 $\mathrm{E}(Z)$?

所求的不等式必须来自 $\mathrm{Var}(Z) > 0$，而方差需要用到这两个矩（moment）。对数会在每个矩中出现，其一次项会互相抵消，只剩下平方项。

对两个积分，先做除法：

$$\mathrm{f}(x) = c + \frac{c^2}{x-c}, \qquad x\,\mathrm{f}(x) = \frac{cx^2}{x-c} = c\Big(x + c + \frac{c^2}{x-c}\Big).$$

记 $L = \ln\Big(\dfrac{b-c}{a-c}\Big)$；由于 $b-c > a-c > 0$，$L$ 为正。于是

$$\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \Big(c + \frac{c^2}{x-c}\Big)\mathrm{d}x = c + \frac{c^2 L}{b-a}.$$

由第 (i) 部分，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z^2) &= -ab + \frac{2c}{b-a}\int_a^b \Big(x + c + \frac{c^2}{x-c}\Big)\mathrm{d}x \\ &= -ab + \frac{2c}{b-a}\Big(\frac{b^2-a^2}{2} + c(b-a) + c^2 L\Big) \\ &= -ab + c(a+b) + 2c^2 + \frac{2c^3 L}{b-a}.\end{aligned}$$

由于 $c(a+b) = ab$，首两项互相抵消。减去 $\mathrm{E}(Z)^2 = c^2 + \dfrac{2c^3L}{b-a} + \dfrac{c^4L^2}{(b-a)^2}$ 后，含 $L$ 的一次项抵消，得

$$\mathrm{Var}(Z) = c^2 - \frac{c^4L^2}{(b-a)^2}.$$

$Z$ 并非常数：由第 (i) 部分，其分布函数（distribution function）$\big(b - \mathrm{f}(y)\big)/(b-a)$ 在 $[a,b]$ 上由 0 严格递增至 1。所以 $\mathrm{Var}(Z) > 0$，由此得

$$L^2 < \frac{(b-a)^2}{c^2}.$$

$L$ 与 $(b-a)/c$ 均为正，所以可以两边开平方根：

$$\ln\Big(\frac{b-c}{a-c}\Big) < \frac{b-a}{c}.$$

## 验算

- 在第 (i) 部分，试用最简单的自反函数例子 $\mathrm{f}(x) = a + b - x$。此时 $Y$ 在 $[a,b]$ 上均匀分布，而公式给出 $\mathrm{E}(Y^2) = -ab + \frac{2}{b-a}\int_a^b x(a+b-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$，这正是均匀分布随机变量的二阶矩。

- 取 $a=1$、$b=3$，则 $c=\frac{3}{4}$，$L=\ln 9\approx 2.197$，而 $(b-a)/c=\frac{8}{3}\approx 2.667$。不等式成立，且 $\mathrm{Var}(Z)=\frac{9}{16}-\frac{81}{256}\cdot\frac{(\ln 9)^2}{4}\approx 0.180$。用电脑对 f 和 $\mathrm{f}^2$ 作数值积分，得到相同的方差。
- 当 $b\to a$ 时，不等式两边都趋于 0，而 $\mathrm{Var}(Z)\to 0$，理应如此：$Z$ 被挤压在 $[a,b]$ 之内。

## 常见错误

- 忘记递减函数会把不等式反向，因而写成 $\mathrm{P}(Y\le y)=\mathrm{P}(X\le \mathrm{f}(y))$。
- 漏掉密度 $-\mathrm{f}'(y)/(b-a)$ 中的负号。密度不可能是负数。
- 没有说明为何 $\mathrm{Var}(Z)$ 严格为正，或者开平方根时没有指出两边均为正。

## STEP 之外

第 (i) 部分是密度变换法则的特例：若 $Y=\mathrm{f}(X)$ 且 f 单调（monotonic），则 $g_Y(y)=g_X\big(\mathrm{f}^{-1}(y)\big)\,\big|(\mathrm{f}^{-1})'(y)\big|$。由 $\mathrm{Var}(Z)>0$ 得出严格不等式，是一个强大技巧的例子：$\mathrm{E}(Z)^2\le \mathrm{E}(Z^2)$ 其实是乔装了的詹森不等式（Jensen's inequality）（或柯西–施瓦茨不等式（Cauchy–Schwarz inequality）），只要巧妙地选取随机变量，就能证明许多经典不等式。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）涵盖了这两个概念。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。