详细解答

STEP III 2020，第 10 题

力学 · 简谐运动

> **STEP III 2020，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

质点悬挂于弹簧下时，会绕其平衡位置（equilibrium position）作简谐运动（simple harmonic motion），由此可用 k、g 和 a 表示 Ω。在平台上时，质点的加速度就是平台的加速度，而平台的加速度可用 x 表示，因此牛顿第二定律（Newton's second law）直接给出反作用力（reaction）。要保持接触，反作用力必须时刻非负；由于它原来是 x 的线性（linear）函数，我们只需在平台行程的两端检查即可，而哪一端是关键，则取决于 ω 比 Ω 小还是大。

解答

把质点视为质点模型（point mass），弹簧视为轻弹簧，且无论伸长或压缩（compression）均遵从胡克定律（Hooke's law）。全文中，作用于质点的力以向上为正。

悬挂的质点。 设 y 为质点在 A 下方的距离，则伸长量（extension）为 $y-a$，张力（tension）为 $kmg(y-a)/a$，向上作用于质点。以向下为正应用牛顿第二定律，得

$$m\ddot{y} = mg - \frac{kmg}{a}(y-a) \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{y} = -\frac{kg}{a}\left(y - a - \frac{a}{k}\right).$$

令 $z = y - a(1+\frac{1}{k})$，上式变为 $\ddot{z} = -\frac{kg}{a}z$，即绕平衡点 $y = a(1+\frac{1}{k})$ 的简谐运动。质点从静止释放时并不在此点（任何不等于 a/k 的伸长量都给出 $z \neq 0$），因此它以角频率（angular frequency）$\sqrt{kg/a}$ 作竖直振动，周期（period）为 $2\pi\sqrt{a/(kg)}$。令此等于 $2\pi/\Omega$，得 $\Omega^2 = kg/a$，即

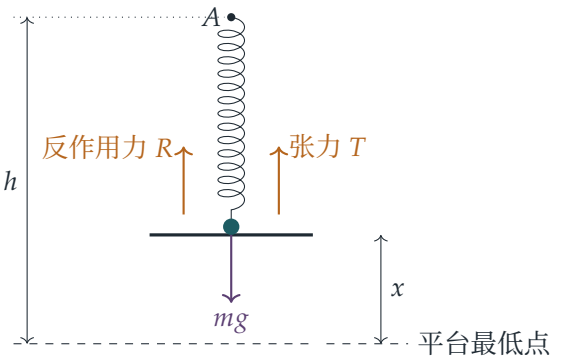
$$kg = a\Omega^2.$$

下文会以 $g/\Omega^2 = a/k$ 的形式使用此式。

平台。 平台作振幅（amplitude）为 b、角频率为 ω 的简谐运动，因此它在其最低点上方的高度 x 的范围为 $0 \le x \le 2b$，中心为 $x = b$。所以其加速度为

$$\ddot{x} = -\omega^2(x-b) = \omega^2(b-x).$$

（例如，$x = b(1-\cos\omega t)$ 给出 $\ddot{x} = \omega^2 b\cos\omega t = \omega^2(b-x)$。）



反作用力。 质点与平台接触期间随平台一起运动，所以它在平台最低点上方的高度为 x，加速度为 $\ddot{x}$。它在 A 下方的距离为 $h-x$，因此弹簧的伸长量为 $h-x-a$，张力为

$$T = \frac{kmg}{a}(h-x-a) = m\Omega^2(h-x-a),$$

这里用了 $kg/a = \Omega^2$。（若 $h-x<a$，弹簧被压缩，T 为负，即推力（thrust），上式依然成立。）作用于质点的力为向上的 R 和 T 以及向下的 mg，所以

$$R + T - mg = m\ddot{x} = m\omega^2(b-x),$$

因此

$$R = mg - m\Omega^2(h-x-a) + m\omega^2(b-x) = mg + m\Omega^2(a+x-h) + m\omega^2(b-x),$$

此即所求。

保持接触。 质点始终留在平台上，当且仅当对 $[0,2b]$ 内每一个 x 都有 $R \ge 0$。把含 x 的项归并，

$$\frac{R}{m} = g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b + (\Omega^2 - \omega^2)\,x.$$

想一想 为甚么只需看 x 的一个值就足够?

R 是 x 的线性函数，所以在区间 $0 \le x \le 2b$ 上，其最小值出现在其中一端：若斜率 $\Omega^2 - \omega^2$ 为正，则在 $x = 0$；若为负，则在 $x = 2b$。平台在每个周期中都会到达两端，所以“$R \ge 0$ 时刻成立”等价于“$R \ge 0$ 在相应的一端成立”。

情况 $\omega < \Omega$。最小值在 $x = 0$（运动的最低点），所以需要

$$g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b \geq 0 \iff h \leq a + \frac{g}{\Omega^2} + \frac{\omega^2 b}{\Omega^2} = a\left(1+\frac{1}{k}\right) + \frac{\omega^2 b}{\Omega^2},$$

这里除以 $\Omega^2 > 0$ 并用了 $g/\Omega^2 = a/k$。这就是所求的不等式。

情况 $\omega > \Omega$。此时最小值在 $x = 2b$（运动的最高点），所以需要

$$g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b + 2b(\Omega^2 - \omega^2) \geq 0 \iff h \leq a\left(1+\frac{1}{k}\right) + b\left(2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right).$$

对所有 ω 都成立的界。 假设质点保持接触。

- 若 $\omega < \Omega$, 则 $\omega^2 b/\Omega^2 < b$（因为 $b > 0$), 所以 $h \leq a(1+\frac{1}{k}) + \omega^2 b/\Omega^2 < a(1+\frac{1}{k}) + b$。
- 若 $\omega > \Omega$，则 $2 - \omega^2/\Omega^2 < 1$，所以 $h \leq a(1+\frac{1}{k}) + b(2-\omega^2/\Omega^2) < a(1+\frac{1}{k}) + b$。
- 若 $\omega = \Omega$，R 中含 x 的项互相抵消，$R/m = g + \Omega^2(a-h) + \Omega^2 b$ 为常数；$R \geq 0$ 恰好给出 $h \leq a(1+\frac{1}{k}) + b$。

所以无论哪种情况,

$$h \leq a\left(1+\frac{1}{k}\right) + b$$

都是必要条件，与 ω 的值无关。由于 $h - b$ 是平台运动中心在 A 下方的深度，而 $a(1+\frac{1}{k})$ 是悬挂平衡位置的深度，这个条件的意思是：平台振动的中心点不能低于质点本身的平衡位置。

验算

- 取 $a = 1$、$k = 2$、$g = 9.8$, 以数值方法逐步模拟自由运动, 所得周期给出 $a\Omega^2 \approx 19.600$, 与 $kg = 19.6$ 吻合。
- 若平台静止（$b = 0$），两个界都变成 $h \leq a(1+\frac{1}{k})$：平台不能低于平衡点，否则弹簧会把质点拉离平台。这完全正确。
- 在 $\omega = \Omega$ 时，两种情况的界一致，都给出 $a(1+\frac{1}{k}) + b$，按连续性（continuity）理应如此。

常见错误

- 只检查运动的最高点。对于缓慢的平台（$\omega < \Omega$），质点最危险的位置是最低点，那里弹簧向上拉得最用力。
- 忘记弹簧可以被压缩：张力公式 $kmg(h-x-a)/a$ 无论正负都适用，所以不必另行分情况讨论。

STEP 之外

这其实是一个受迫振子（forced oscillator）：弹簧试图令质点以其固有频率（natural frequency）Ω 振动，而平台则强加频率 ω，反作用力正是调和两者所需的力。大学的振动课程会研究受驱系统、共振（resonance），以及响应如何随 ω/Ω 变化。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对这些概念有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。