详细解答

STEP III 2020，第 1 题

纯数学 · 归约公式

STEP III 2020，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

第 (i) 部分是一条递推公式（reduction formula），所以自然的第一步是分部积分法（integration by parts）：对 $\cos x$ 的幂求导，并对 $\cos bx$ 积分。这样会剩下乘积 $\sin x \sin bx$，而 $\cos(b-1)x$ 的复角公式（compound-angle formula）可以把它变回原本类型的积分。第 (ii) 部分不需要任何新工具：递推关系（recurrence relation）把 a 和 b 同时减一，使差 $b-a=2m+1$ 保持不变，因此可以顺利地由 n 推进到 $n+1$。

解答

第 (i) 部分

设 $a, b \geq 1$。取 $u=\cos^a x$ 及 $\mathrm{d}v=\cos bx\,\mathrm{d}x$ 进行分部积分，于是 $\mathrm{d}u=-a\cos^{a-1}x\sin x\,\mathrm{d}x$，而 $v=\frac{1}{b}\sin bx$（由于 $b\neq 0$，这样做没有问题）：

$$\mathrm{I}(a,b)=\left[\frac{\cos^a x\,\sin bx}{b}\right]_0^{\pi/2}+\frac{a}{b}\int_0^{\pi/2}\cos^{a-1}x\,\sin x\,\sin bx\,\mathrm{d}x.$$

边界项在两端都等于零：在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处是因为 $\cos^a\frac{\pi}{2}=0$（这里用到 $a\geq 1$），而在 $x=0$ 处是因为 $\sin 0=0$。

想一想 怎样才能把 $\sin x\sin bx$ 变回 x 的倍数的余弦？

我们希望出现 $\mathrm{I}(a-1,b-1)$，所以考虑 $\cos(b-1)x$：

$$\cos(b-1)x=\cos bx\cos x+\sin bx\sin x \quad\Longrightarrow\quad \sin x\sin bx=\cos(b-1)x-\cos x\cos bx.$$

代入后得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2} \cos^{a-1}x\,\cos(b-1)x\,\mathrm{d}x - \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2}\cos^a x\,\cos bx\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{a}{b}\,\mathrm{I}(a-1,b-1) - \frac{a}{b}\,\mathrm{I}(a,b).\end{aligned}$$

两边乘以 b，再把含 $\mathrm{I}(a,b)$ 的项合并，得 $(a+b)\,\mathrm{I}(a,b) = a\,\mathrm{I}(a-1,b-1)$；由于 $a+b>0$，

$$\mathrm{I}(a,b) = \frac{a}{a+b}\,\mathrm{I}(a-1,b-1),$$

此即所求。

第 (ii) 部分

左边的积分是 $\mathrm{I}(n,\,n+2m+1)$。记右边为

$$R(n,m) = (-1)^m\,\frac{2^n\,n!\,(2m)!\,(n+m)!}{m!\,(2n+2m+1)!}$$

。固定任意非负整数 m；我们对 n 用数学归纳法（induction）证明对所有 $n\ge 0$，$\mathrm{I}(n,n+2m+1) = R(n,m)$。

基本情况， $n=0$。

$$\mathrm{I}(0,2m+1) = \int_0^{\pi/2}\cos(2m+1)x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin((2m+1)\frac{\pi}{2})}{2m+1} = \frac{(-1)^m}{2m+1},$$

因为 $\sin(m\pi+\frac{\pi}{2}) = \cos m\pi = (-1)^m$。另一方面，

$$R(0,m) = (-1)^m\,\frac{1\cdot 1\cdot(2m)!\,m!}{m!\,(2m+1)!} = \frac{(-1)^m}{2m+1}.$$

所以结果在 $n=0$ 时成立。

归纳步骤。假设对某个 $k\ge 0$，$\mathrm{I}(k,k+2m+1) = R(k,m)$。在第 (i) 部分中取 $a=k+1$ 及 $b=k+2m+2$，两者都是正整数，于是 $a-1=k$、$b-1=k+2m+1$ 而 $a+b = 2k+2m+3$：

$$\mathrm{I}(k+1,\,k+2m+2) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,\mathrm{I}(k,\,k+2m+1) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,R(k,m).$$

留意 $k+2m+2 = (k+1)+2m+1$，所以左边正正是 $n=k+1$ 且 m 不变时的积分。

> ? **想一想** 按公式，$R(k+1,m)/R(k,m)$ 应该等于甚么？

在 R 中由 $n=k$ 变到 $n=k+1$ 时，因子 $(-1)^m(2m)!/m!$ 不变，而

$$\begin{aligned}\frac{R(k+1,m)}{R(k,m)} &= \frac{2^{k+1}}{2^k}\cdot\frac{(k+1)!}{k!}\cdot\frac{(k+m+1)!}{(k+m)!}\cdot\frac{(2k+2m+1)!}{(2k+2m+3)!}\\ &= \frac{2(k+1)(k+m+1)}{(2k+2m+3)(2k+2m+2)} = \frac{k+1}{2k+2m+3},\end{aligned}$$

这里用到 $2k+2m+2=2(k+m+1)$。因此

$$\mathrm{I}(k+1,\,k+2m+2)=\frac{k+1}{2k+2m+3}\,R(k,m)=R(k+1,m),$$

这就是 $n=k+1$ 时的命题。

由于结果在 $n=0$ 时成立，而且它在 $n=k$ 时成立可推出它在 $n=k+1$ 时成立，根据数学归纳法，它对所有非负整数 n 都成立。由于 m 是任意的，它对所有非负整数 m 也成立：

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\cos(n+2m+1)x\,\mathrm{d}x=(-1)^m\,\frac{2^n\,n!\,(2m)!\,(n+m)!}{m!\,(2n+2m+1)!}.$$

验算

- 取 $n=1$、$m=0$：公式给出 $\frac{2\cdot1\cdot1\cdot1}{1\cdot3!}=\frac{1}{3}$。直接计算，$\cos x\cos 2x=\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的积分是 $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{1}{3}$。
- 取 $n=1$、$m=1$：公式给出 $-\frac{2\cdot2\cdot2}{5!}=-\frac{1}{15}$，而以数值方法计算 $\int_0^{\pi/2}\cos x\cos 5x\,\mathrm{d}x$ 得 -0.066667。
- 第 (i) 部分的递推关系和第 (ii) 部分的闭合形式，亦已用电脑就所有 $n\le 6$、$m\le 5$ 验证过。

常见错误

- 忘记说明边界项为何等于零；上限处需要 $a\ge 1$。
- 对 n 进行归纳，却让 m 跟着改变：第 (i) 部分把 a 和 b 一同减一，所以 m 保持不变。
- 在 $\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right)$ 中弄错正负号；它依次为 $1,-1,1,\ldots$，因而给出 $(-1)^m$。

STEP 之外

这类递推公式是递推关系在积分上的对应，而闭合形式由阶乘（factorial）的比构成，方式与沃利斯乘积（Wallis's product）及 Beta 函数（Beta function）$\int_0^{\pi/2}\cos^p x\sin^q x\,\mathrm{d}x$ 相同；这些内容在大学分析或数学方法课程的早期便会遇到。如想做更多同类题目，可参阅 Siklos，*Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。