详细解答

STEP II 2020，第 9 题

力学 · 相撞的抛体

STEP II 2020，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

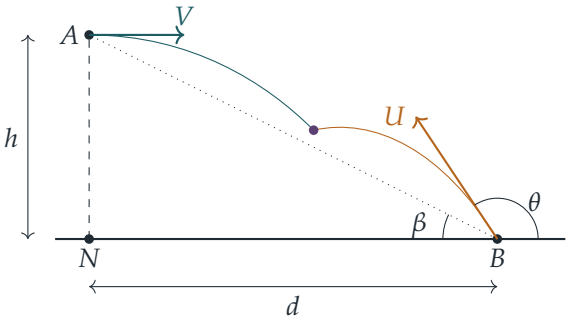
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

把两粒质点放进同一个坐标系（coordinate system），写出各自在时刻 t 的位置。两者都受相同的向下加速度（acceleration）g，所以比较高度时，$-\frac{1}{2}gt^2$ 项会互相抵消：相对于对方而言，两粒质点都以恒定速度沿直线运动。这令碰撞时间变得非常简单，而之后每一部分都只是它的简短推论。

解答

把两粒质点都模型化为只受重力作用、自由运动的质点（point mass），不计空气阻力（air resistance）。取 N 为原点，x 轴沿 NB（故 $B=(d,0)$，$A=(0,h)$），y 轴铅垂向上。从 A 出发的质点向 B 运动，从 B 出发的质点向 N 运动，所以两者的水平速度方向相反；这正是题目所给结果所描述的设置。



抛出后时刻 t，从 A 出发的质点位于

$$x_A = Vt, \qquad y_A = h - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

而从 B 出发的质点位于

$$x_B = d - Ut\cos\theta, \qquad y_B = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

若两个坐标同时相等，它们便在时刻 T 碰撞（collision）。高度相等当且仅当

$$h - \tfrac{1}{2}gT^2 = UT\sin\theta - \tfrac{1}{2}gT^2 \quad\Longrightarrow\quad T = \frac{h}{U\sin\theta},$$

这是唯一可能的碰撞时间（由于 θ 是锐角，$\sin\theta > 0$）。在同一时刻，水平位置也必须相等：

$$VT = d - UT\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad (V + U\cos\theta)\,\frac{h}{U\sin\theta} = d.$$

两边乘以 $U\sin\theta$，得 $Vh + Uh\cos\theta = Ud\sin\theta$，再除以 U，

$$d\sin\theta - h\cos\theta = \frac{Vh}{U},$$

此即所求。

第 (i) 部分

由直角三角形 ANB 得 $\tan\beta = h/d$，且 $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$。由于 V、h、U 都是正数，刚证得的结果给出 $d\sin\theta - h\cos\theta > 0$。除以 $d\cos\theta > 0$（因 θ 是锐角），

$$\tan\theta > \frac{h}{d} = \tan\beta.$$

两个角都落在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 内，而 tan 在此区间上严格递增，所以 $\theta > \beta$。

第 (ii) 部分

> **想一想** 到目前为止的代数推导完全没有用到地面。我们还有甚么物理条件未加上？

碰撞必须在任何一粒质点到达地面之前发生，所以时刻 T 的共同高度必须至少为 0：

$$h - \tfrac{1}{2}gT^2 \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad h \geq \frac{gh^2}{2U^2\sin^2\theta} \quad\Longleftrightarrow\quad U^2\sin^2\theta \geq \frac{gh}{2}.$$

（我们除以了 $h > 0$，并乘以了 $U^2\sin^2\theta > 0$。）由于 $U\sin\theta > 0$，取正平方根得

$$U\sin\theta \geq \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

等号对应两粒质点恰好在到达地面时相遇的情况。

第 (iii) 部分

记 $r = AB = \sqrt{d^2 + h^2}$，于是 $d = r\cos\beta$，$h = r\sin\beta$。那么

$$d\sin\theta - h\cos\theta = r(\sin\theta\cos\beta - \cos\theta\sin\beta) = r\sin(\theta - \beta),$$

而碰撞条件变成

$$r\sin(\theta-\beta) = \frac{Vr\sin\beta}{U} \quad\Longrightarrow\quad \frac{U}{V} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)}.$$

由第 (i) 部分，$\theta - \beta > 0$；此外 $\theta - \beta < \theta < \frac{1}{2}\pi$。所以 $0 < \sin(\theta-\beta) < 1$，又因 $\sin\beta > 0$，

$$\frac{U}{V} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)} > \sin\beta.$$

最后部分

碰撞点的高度是 $h - \frac{1}{2}gT^2$，所以

$$\text{碰撞点高于}\tfrac{1}{2}h \iff h - \tfrac{1}{2}gT^2 > \tfrac{1}{2}h \iff gT^2 < h.$$

从 B 出发的质点的铅垂速度是 $U\sin\theta - gt$，所以

$$\text{它正在上升，于时刻}T \iff U\sin\theta - gT > 0 \iff gT < U\sin\theta.$$

想一想 怎样才能把 $gT < U\sin\theta$ 与 $gT^2 < h$ 作比较?

利用碰撞时间本身：$T = h/(U\sin\theta)$ 表示 $U\sin\theta = h/T$。于是乘以 $T > 0$，

$$gT < U\sin\theta \iff gT < \frac{h}{T} \iff gT^2 < h.$$

两个条件都等价于 $gT^2 < h$，所以两粒质点在高于 $\frac{1}{2}h$ 处碰撞，当且仅当从 B 出发的质点在碰撞时仍在向上运动。

验算

- 取 $g = 9.8$，$h = 10$，$d = 20$，$U = 20$，$\theta = \frac{1}{4}\pi$。碰撞条件给出 $V = U(d\sin\theta - h\cos\theta)/h = 10\sqrt{2} \approx 14.14$，以及 $T = 1/\sqrt{2} \approx 0.707\,\text{s}$。此时两粒质点都位于 $x = 10$，$y = 10 - 4.9\times\frac{1}{2} = 7.55$，高于 $\frac{1}{2}h = 5$；从 B 出发的质点的铅垂速度为 $10\sqrt{2} - 9.8/\sqrt{2} \approx 7.21 > 0$，正在上升，与最后部分的预测一致。此外 $U/V = \sqrt{2} > \sin\beta = 1/\sqrt{5}$。
- 无重力的直觉：当 $g = 0$ 时，两粒质点沿直线运动，而条件 $U/V = \sin\beta/\sin(\theta-\beta)$ 正是由 A、B 和相遇点组成的三角形中的正弦定理（sine rule）。重力令两粒质点向下移动相同的距离，所以条件不变。

- 以电脑对数以千计随机选取的 h、d、U、θ 作验算，确认了碰撞、全部三条不等式，以及最后部分的等价关系。

常见错误

- 在第 (ii) 部分忘记地面：该不等式来自碰撞发生的高度至少为零，而不是来自碰撞方程本身的任何东西。
- 由 $\tan\theta > \tan\beta$ 推出 $\theta > \beta$，却没有说明两个角都是锐角，而 tan 在该范围内递增。
- 在第 (iii) 部分只写到 $\sin(\theta-\beta) \le 1$ 便停下；严格不等式需要 $\theta - \beta < \frac{1}{2}\pi$。

STEP 之外

$-\frac{1}{2}gt^2$ 项的抵消，是转换到自由下落参考系（frame of reference）的一个例子：在一个以 g 加速的参考系中，重力消失，两粒质点都沿直线运动。这是伽利略（Galileo）变换和加速参考系等概念最简单的情形，这些概念正是大学第一门力学课程的开端，日后亦是爱因斯坦（Einstein）等效原理（equivalence principle）的出发点。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对非惯性参考系（non-inertial frame）有细致的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。