详细解答

STEP II 2020，第 8 题

纯数学 · 多项式与积分

STEP II 2020，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

由于 $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$，f 的每个根都是 F 的转向点（turning point），而每个面积条件都变成关于 F 在其中一个转向点的值的陈述。一旦知道 F 在 0 和 c 有二重根（double root），和式 $\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(c-x)$ 便化简为只有一个决定正负号的因子 $c - 2h$。把这个正负号与我们对 F 在 $[0, c]$ 上的最大值和最小值的认识作比较，便迫使图像具有对称性。

解答

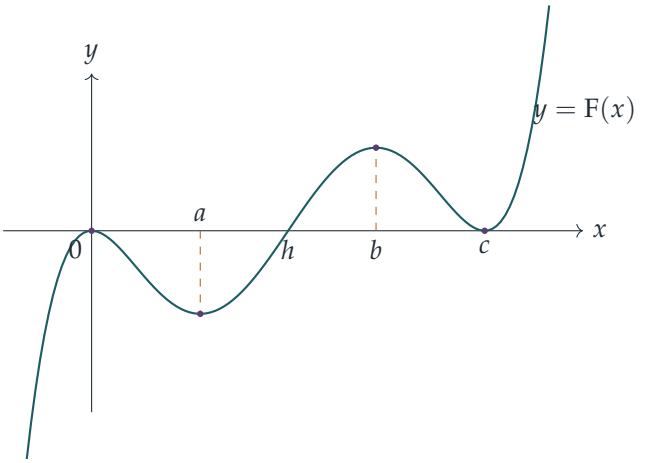
由于 f 是首一（monic）多项式，其根为 $0, a, b, c$，故 $\mathrm{f}(x) = x(x-a)(x-b)(x-c)$。因此在 $(0, a)$ 上 $\mathrm{f} < 0$，在 (a, b) 上 $\mathrm{f} > 0$，在 (b, c) 上 $\mathrm{f} < 0$，而当 $x < 0$ 及 $x > c$ 时 $\mathrm{f} > 0$。设 A 为 0 与 a 之间的面积。题设条件指出 b 与 c 之间的面积为 A，a 与 b 之间的面积为 $2A$，其中 $A > 0$。

第 (i) 部分

由于 $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$，在 $\mathrm{f} < 0$ 的区间上的积分等于该处面积的相反数。因此

$$\mathrm{F}(0) = 0, \qquad \mathrm{F}(a) = -A, \qquad \mathrm{F}(b) = -A + 2A = A, \qquad \mathrm{F}(c) = A - A = 0.$$

由于 $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$，F 的转向点位于 $x = 0, a, b, c$。f 的正负号在 0 和 b 由 $+$ 变为 $-$，所以该处为极大点；在 a 和 c 由 $-$ 变为 $+$，所以该处为极小点。F 是五次多项式，其首项系数（leading coefficient）$\frac{1}{5}$ 为正，故当 $x \to \pm\infty$ 时 $\mathrm{F}(x) \to \pm\infty$。



曲线在 $(0,0)$ 有极大点，在 $x=a$ 有极小点且 $y=-A$，在 $x=b$ 有极大点且 $y=A$，并在 $(c,0)$ 有一个与 x 轴相切的极小点。

F 的形式。F 是首项系数为 $\frac{1}{5}$ 的 5 次多项式。在 $x=0$，有 $F(0)=0$ 及 $F'(0)=f(0)=0$，所以 $x=0$ 是重数（multiplicity）至少为 2 的根。同理 $F(c)=0=F'(c)$，所以 c 是重数至少为 2 的根。这样便确定了五个一次因子中的四个：

$$F(x)=\tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2(x-h)$$

其中 h 为某实数。此外，$F(a)=-A<0<A=F(b)$，所以 F 在 a 与 b 之间（不含端点）有一个根。0 和 c 都不在 (a,b) 之内，所以这个根必定是 h。因此 $a<h<b$，特别地 $0<h<c$。

和式。注意 $(c-x)^2((c-x)-c)^2=x^2(x-c)^2$。因此

$$\begin{aligned}F(x)+F(c-x)&=\tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2[(x-h)+(c-x-h)]\\&=\tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2(c-2h).\end{aligned}$$

第 (ii) 部分

在 $[0,c]$ 上，F 在 $[0,a]$ 上严格递减，在 $[a,b]$ 上严格递增，在 $[b,c]$ 上严格递减。所以在 $[0,c]$ 上的最小值是 $F(a)=-A$：唯一的其他候选值是端点值 $F(c)=0>-A$。这个最小值只在 $x=a$ 取得。所以当 $0\le x\le c$ 时，

$$F(b)+F(x)\ \ge\ F(b)+F(a)=A-A=0,$$

而当 $x\neq a$ 时不等式严格成立。

想一想 取哪个 x 值，可以使 $\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(x)$ 看起来像第 (i) 部分的和式?

取 $x=c-b$，由于 $0<b<c$，它位于 $[0,c]$ 之内。由第 (i) 部分，

$$\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(c-b)=\tfrac{1}{5}b^2(b-c)^2(c-2h).$$

若 $c-b\neq a$，左方严格为正。由于 $\frac{1}{5}b^2(b-c)^2>0$，可推出 $c-2h>0$。所以 $c-b=a$ 或 $c>2h$，此即所求。

现在把同一论证倒过来用。在 $[0,c]$ 上，F 的最大值是 $\mathrm{F}(b)=A$，大于端点值 $\mathrm{F}(0)=\mathrm{F}(c)=0$，而且只在 $x=b$ 取得。所以当 $0\le x\le c$ 时，

$$\mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(x)\le \mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(b)=0,$$

而当 $x\neq b$ 时不等式严格成立。取 $x=c-a\in[0,c]$，得 $\frac{1}{5}a^2(c-a)^2(c-2h)\le 0$，若 $c-a\neq b$ 则严格成立。所以 $c-a=b$ 或 $c<2h$。

若 $c\neq a+b$，两个结论分别给出 $c>2h$ 和 $c<2h$，这是不可能的。因此 $c=a+b$。于是 $c-b=a$，所以

$$0=\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(a)=\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(c-b)=\tfrac{1}{5}b^2a^2(c-2h).$$

由于 $a,b\neq 0$，得 $c=2h$。

第 (iii) 部分

当 $h=\frac{1}{2}c$ 时，有 $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{5}u\,(x-\frac{1}{2}c)$，其中 $u=x^2(x-c)^2$，因此 $u'=2x(x-c)(2x-c)$。用乘积法则（product rule）求导，

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x)=\mathrm{F}'(x)&=\tfrac{1}{5}\left[2x(x-c)(2x-c)(x-\tfrac{1}{2}c)+x^2(x-c)^2\right]\\&=\tfrac{1}{5}x(x-c)[(2x-c)^2+x(x-c)]\\&=\tfrac{1}{5}x(x-c)(5x^2-5cx+c^2)\\&=x(x-c)(x^2-cx+\tfrac{1}{5}c^2).\end{aligned}$$

（所以 $a,b=\frac{1}{2}c\mp\frac{c}{2\sqrt{5}}$，两者之和确实是 c。）

想一想 各根关于 $x=\frac{1}{2}c$ 对称。能否利用这一点令二阶导数（second derivative）变得容易计算?

可以。设 $y=x-\frac{1}{2}c$。则 $x(x-c)=y^2-\frac{1}{4}c^2$ 及 $x^2-cx+\frac{1}{5}c^2=y^2-\frac{1}{20}c^2$，所以

$$\mathrm{f}=(y^2-\tfrac{1}{4}c^2)(y^2-\tfrac{1}{20}c^2)=y^4-\tfrac{3}{10}c^2y^2+\tfrac{1}{80}c^4.$$

由于 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1$，

$$\mathrm{f}''(x) = 12y^2 - \tfrac{3}{5}c^2,$$

它恰好在 $y^2 = \frac{1}{20}c^2$ 时为零。在这些点，f 的因子 $y^2 - \frac{1}{20}c^2$ 等于零，所以 $\mathrm{f} = 0$。每一点都是 f″（作为 y 的二次式）的单根（simple root），所以 f″ 在该处变号，它们确实是拐点（point of inflection）。所以两个拐点都位于 x 轴上。事实上，它们就是点 $(a, 0)$ 和 $(b, 0)$。

验算

- 取 $c = 2$，则 $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.5528$ 及 $b \approx 1.4472$。对 f 作数值积分，得 $[0, a]$、$[a, b]$ 和 $[b, c]$ 上的面积分别为 0.05724、0.11449 和 0.05724：外侧两个相等，而且各是中间那个的一半。
- 以 $a + b = c$ 及 $ab = \frac{1}{5}c^2$ 展开 $x(x-a)(x-b)(x-c)$，可重新得到第 (iii) 部分的式子。
- 取 $c = 2$，用有限差分（finite difference）估计 f″ 在 $x = a \approx 0.5528$ 的值，在舍入误差范围内为零，而且它在 $x = 0.54$ 与 $x = 0.56$ 之间变号。

常见错误

- 只记得 $\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(c) = 0$，忘记同时有 $\mathrm{F}'(0) = \mathrm{F}'(c) = 0$，因而遗漏了二重根。
- 没有证明 $0 < h < c$：决定 h 位置的，正是 F 在 a 与 b 之间的变号。
- 在第 (ii) 部分只用了第一个不等式。它只给出“$c = a + b$ 或 $c > 2h$”，单靠这一点并不足够。还需要用 $\mathrm{F}(a)$ 得出的反向不等式，才能完成论证。

STEP 之外

第 (ii) 部分的论证用到极值定理（extreme value theorem）：闭区间上的连续函数必定取得最大值和最小值，而在这里我们还确切知道它们在哪里取得。面积条件迫使这个四次多项式关于 $x = \frac{1}{2}c$ 对称，这说明了积分条件可以如何确定一个多项式的形状。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）仔细论述了极值定理，以及联系 F 与 f 的微积分基本定理（fundamental theorem of calculus）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。