详细解答

STEP II 2020，第 7 题

纯数学 · 复数变换

STEP II 2020，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

映射 $z \mapsto w = \dfrac{2}{z-2}$ 是先平移、再作反演（inversion），而反演会把不经过原点的直线映成经过原点的圆。要证明 w 位于某个特定的圆上，最干净利落的做法是先猜出圆心 c，再证明 $|w-c|$ 可化简为常数。把 $w-c$ 写成单一分式后，会发现分子与分母互为共轭（conjugate）（或几乎如此），正因如此，模（modulus）才是常数。

解答

以下全程使用 $|\alpha/\beta| = |\alpha|/|\beta|$，以及对实数 x、y 有 $|x+yi| = |x-yi| = |y+xi| = \sqrt{x^2+y^2}$。

第 (i) 部分

设 $z = 3+ti$，则 $z-2 = 1+ti$，所以

$$w - 1 = \frac{2}{1+ti} - 1 = \frac{2-(1+ti)}{1+ti} = \frac{1-ti}{1+ti}.$$

分子与分母互为共轭复数，因此模相同，都是 $\sqrt{1+t^2}$，而且永不为零。故此

$$|w-1| = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = 1,$$

与 t 无关。直线 $\mathrm{Re}(z) = 3$ 上每一个 z 都可写成 $3+ti$（t 为某实数），所以对每个这样的 z，点 w 与 1 的距离都是 1：它位于圆心为 1、半径为 1 的圆上。

直线 V。现在 $z = p+ti$, 不妨记 $a = p-2$; 由于 $p \neq 2$, a 是非零实数。于是 $z-2 = a+ti$,

永不为零。当 $p=3$ 时圆心是 $1=1/a$，所以一般情况下我们尝试以 $1/a$ 为圆心：

$$w-\frac{1}{a}=\frac{2}{a+ti}-\frac{1}{a}=\frac{2a-(a+ti)}{a(a+ti)}=\frac{a-ti}{a(a+ti)}.$$

同样地 $|a-ti|=|a+ti|$，所以

$$\left|w-\frac{1}{p-2}\right|=\frac{1}{|a|}=\frac{1}{|p-2|}.$$

因此 w 位于以下的圆上：

$$\text{圆心}\frac{1}{p-2},\qquad \text{半径}\frac{1}{|p-2|}.$$

半径中的绝对值符号不可省略：若 $p<2$，圆心位于负实轴上，但半径必须是正数。

想一想 如果题目没有先给出 $p=3$ 的情况，我们会怎样找出圆心 $1/(p-2)$？

点 $z=p$（即 $t=0$）给出 $w=2/a$；而当 $t\to\pm\infty$ 时，$w\to 0$。这两点是一条直径的两端（圆关于实轴对称，而它们正是圆上仅有的两个实数点），所以圆心是它们的中点 $1/a$。

至于虚部，把分子分母同乘以共轭：

$$w=\frac{2(a-ti)}{a^2+t^2},\qquad \text{所以}\qquad \operatorname{Im}(w)=\frac{-2t}{a^2+t^2}.$$

分母为正，所以 $\operatorname{Im}(w)>0$ 当且仅当 $t<0$。因此 V 上使 $\operatorname{Im}(w)>0$ 的点是

$$z=p+ti,\ \text{其中}t<0,\quad \text{即}V\text{ 上位于实轴下方的点}(\operatorname{Im}(z)<0).$$

第 (ii) 部分

现在 $z=s+qi$，其中 s 为实数。记 $u=s-2$，则 $z-2=u+qi$；由于 $q\neq 0$，它不为零。这里圆的“两端”是 $w=0$（当 $u\to\pm\infty$）及 $w=2/(qi)=-2i/q$（当 $u=0$），由此推测圆心为 $-i/q$。验证：

$$w+\frac{i}{q}=\frac{2}{u+qi}+\frac{i}{q}=\frac{2q+i(u+qi)}{q(u+qi)}=\frac{q+ui}{q(u+qi)}.$$

而 $|q+ui|=\sqrt{q^2+u^2}=|u+qi|$，所以

$$\left|w+\frac{i}{q}\right|=\frac{1}{|q|}.$$

因此 w 位于以下的圆上：

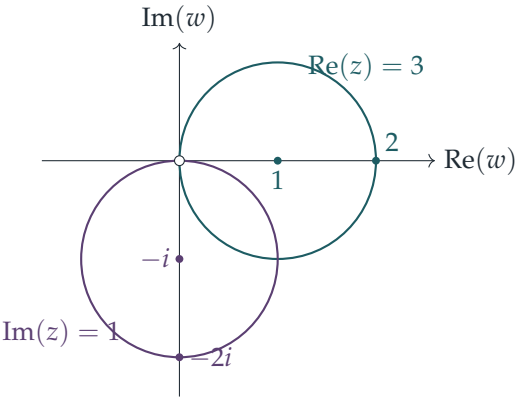
$$\text{圆心}-\frac{i}{q},\qquad \text{半径}\frac{1}{|q|}.$$

至于实部，

$$w=\frac{2(u-qi)}{u^2+q^2},\qquad \text{所以}\qquad \operatorname{Re}(w)=\frac{2u}{u^2+q^2},$$

分母为正。所以 $\mathrm{Re}(w) > 0$ 当且仅当 $u > 0$，即

$$z = s + qi，\text{其中} s > 2，\quad \text{即} H \text{ 中位于下述直线右方的点：} \mathrm{Re}(z) = 2.$$



上图显示 $\mathrm{Re}(z) = 3$ 的像（来自第 (i) 部分）及 $\mathrm{Im}(z) = 1$ 的像（第 (ii) 部分取 $q = 1$）。两个圆都经过原点，但 $w = 0$ 本身永远取不到，因为 $2/(z-2) \neq 0$；它对应于沿直线走到“无穷远处”的 z。

验算

- 在 V 的公式中取 $p = 3$：圆心 $1/(3-2) = 1$，半径 1，与第一个结果吻合。
- 代入数值：$z = 3 - i$ 给出 $w = 2/(1-i) = 1 + i$，有 $|w - 1| = 1$ 及 $\mathrm{Im}(w) = 1 > 0$，与 $t = -1 < 0$ 一致。对于 $q = 1$ 的 H，$z = 3 + i$ 给出 $w = 1 - i$，它与 $-i$ 的距离为 1，且实部为正，与 $3 > 2$ 相符。
- 当 $p \to 2$ 时，半径 $1/|p-2|$ 变大：此时直线 V 非常接近被映到无穷远的点 $z = 2$，所以它的像理应很大。用电脑对数以千计的随机 p、q 及每条直线上的点作检查，证实了两个圆及两个符号条件均正确。

常见错误

- 把半径写成 $1/(p-2)$ 或 $1/q$，而当 $p < 2$ 或 $q < 0$ 时它们是负数。
- 把 $\mathrm{Im}(w)$ 的符号弄反：除以 $z - 2$ 相当于关于实轴作反射，所以 $\mathrm{Im}(w)$ 与 $\mathrm{Im}(z)$ 的符号相反。

STEP 之外

映射 $z \mapsto 2/(z-2)$ 是一个默比乌斯变换（Möbius transformation），即形如 $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ 的映射。这类映射总是把“广义圆”（generalised circles，即圆和直线）映成广义圆；从共形映射（conformal mapping）到双曲几何（hyperbolic geometry），它们都是复分析（complex analysis）入门课程中最基本的几何工具。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）有一章精彩地介绍它们，书中的图像令类似本题的结果一目了然。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。