详细解答

STEP II 2020，第 5 题

纯数学 · 数字和与整除性

> **STEP II 2020，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

10 的每一个幂除以 9 的余数（remainder）都是 1，所以一个数与它的数字和（digit sum）在模（modulo）9 下必定相同。单凭这一点，每条方程都能化成一个很强的整除（divisibility）条件。接著用大小估计收尾：数字和只以约 $9n$ 的速度增长，而数本身则以约 10^{n-1} 的速度增长，因此只剩下寥寥几个候选数需要检验。

解答

第 (i) 部分

设 $x = \sum_{r=0}^{n-1} a_r 10^r$ 及 $\mathrm{d}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r$，则

$$x - \mathrm{d}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r \left(10^r - 1\right).$$

每一项都有 $a_r \geq 0$ 及 $10^r - 1 \geq 0$，所以总和非负。此外，$10^r - 1 = 99\ldots9$（r 个 9）$= 9 \times 11\ldots1$，可被 9 整除（当 $r = 0$ 时它等于 0）。所以每一项都可被 9 整除，因此 $x - \mathrm{d}(x)$ 亦可被 9 整除。 ■

用同余（congruence）的语言来说：对每个正整数 x，都有 $x \equiv \mathrm{d}(x) \pmod 9$。下文会反复用到这个结果。

第 (ii) 部分

等价关系。由于 $\mathrm{d}(x) \equiv x \pmod 9$，

$$x - 44\,\mathrm{d}(x) \equiv x - 44x = -43x \equiv 2x \pmod 9,$$

因为 $-43 = -45 + 2$。所以 $x - 44\,\mathrm{d}(x)$ 是 9 的倍数，当且仅当 $9 \mid 2x$。由于 $\gcd(2,9) = 1$，$9 \mid 2x$ 当且仅当 $9 \mid x$。这样便一次过证明了两个方向。 ■

上下界。假设 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$，且 x 有 n 位数字。每个数字最多是 9，所以 $\mathrm{d}(x) \le 9n$，而 $x = 44\,\mathrm{d}(x) \le 396n$。另外，一个 n 位数的首位数字 $a_{n-1} \ge 1$，所以 $x \ge 10^{n-1}$。合起来得

$$10^{n-1} \le x \le 396n.$$

当 $n = 5$ 时，这需要 $10\,000 \le 1980$，并不成立。此外，若对某个 $n \ge 5$ 有 $10^{n-1} > 396n$，则 $10^n = 10 \cdot 10^{n-1} > 3960n \ge 396(n+1)$，所以由归纳法（induction）可知，不等式 $10^{n-1} \le 396n$ 对每个 $n \ge 5$ 都不成立。因此 $n \le 4$。 ■

> ? **想一想** 怎样才能把搜索范围由 9999 以内的所有数，缩减到只剩几个?

利用刚刚证明的等价关系。若 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$，则 $x - 44\,\mathrm{d}(x) = 0$，这是 9 的倍数，所以 $9 \mid x$。于是 $9 \mid 44\,\mathrm{d}(x)$，而由于 $\gcd(44,9) = 1$，这迫使 $9 \mid \mathrm{d}(x)$。因此 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$ 是 $44 \times 9 = 396$ 的倍数。

求解。由于 $n \le 4$，我们有 $x \le 396 \times 4 = 1584$，所以 x 是 396, 792, 1188, 1584 其中之一。它们的数字和全都是 18，所以在每种情况下 $44\,\mathrm{d}(x) = 792$。唯一符合的是

$$x = 792, \qquad \mathrm{d}(792) = 18, \quad 44 \times 18 = 792.$$

每一个解都在这四个候选数之中，而只有 792 符合，所以再没有其他值。 ■

第 (iii) 部分

记 $y = \mathrm{d}(x)$ 及 $z = \mathrm{d}(y)$，于是方程为 $x = 107z$，且 $z = x/107 > 0$。

整除性。由第 (i) 部分，$x \equiv y \equiv z \pmod 9$。所以

$$0 = x - 107z \equiv z - 107z = -106z \pmod 9.$$

由于 $106 = 99 + 7$，所以 $9 \mid 7z$；又因 $\gcd(7,9) = 1$，得 $9 \mid z$。

大小。第 (i) 部分亦给出：对任何正整数 m，$\mathrm{d}(m) \le m$。所以若 x 有 n 位数字，则 $z = \mathrm{d}(y) \le y \le 9n$，以及

$$10^{n-1} \le x = 107z \le 963n.$$

当 $n = 5$ 时，这需要 $10\,000 \le 4815$，并不成立。用与第 (ii) 部分相同的归纳法（现在是 $10^n > 9630n \ge 963(n+1)$）可证明它对所有 $n \ge 5$ 都不成立，所以 $n \le 4$。

> ? **想一想** 上界 $z \le 36$ 仍然留下好几个 9 的倍数。可以做得更好吗?

可以，方法是再取一次数字和。由于 $n \le 4$，$y = \mathrm{d}(x) \le 36$。在 $1, 2, \ldots, 36$ 之中，最大的数字和是 $\mathrm{d}(29) = 11$，因为小于 37 的两位数十位数字最多是 3，而十位数字为 3 时

个位数字最多是 6（数字和最多是 9），至于十位数字为 2 时则可以有 $2+9=11$。所以 $1 \le z \le 11$，而 z 是 9 的倍数。因此 $z=9$，以及

$$x = 107 \times 9 = 963.$$

验证：$\mathrm{d}(963) = 18$，$\mathrm{d}(18) = 9$，而 $107 \times 9 = 963$。所以 $x = 963$ 满足方程。任何解都必须有 $z = 9$，因此 $x = 963$，所以再没有其他值。 ■

验算

- 抽样验算第 (i) 部分：$249 - 15 = 234 = 9 \times 26$。
- 用电脑搜索所有 $x < 10^6$，发现 792 是 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$ 的唯一解，而 963 是 $x = 107\,\mathrm{d}(\mathrm{d}(x))$ 的唯一解，与上述的上下界一致。
- 留意 $792 = 44 \times 18$ 及 $963 = 107 \times 9$：两者都是 9 的倍数，正如整除性论证所要求的。

常见错误

- 在第 (ii) 部分只得出 x 是 9 的倍数。更强的事实是 $\mathrm{d}(x)$ 也是 9 的倍数，因而 $396 \mid x$，正是这一点令搜索变得简短。
- 只检查了 $n = 5$ 便断言 $n \le 4$。你需要说明为何对所有更大的 n，10^{n-1} 都一直大于 $396n$；归纳法（或者观察到左边每次增大 10 倍，而右边最多只增大 $\frac{6}{5}$ 倍）正好提供了理由。
- 在第 (iii) 部分忘记了 $z > 0$，而正是这一点排除了 $z = 0$。

STEP 之外

$x \equiv \mathrm{d}(x) \pmod 9$ 这个事实，正是“弃九法”（casting out nines）背后的原理，那是一种古老的验算方法。这是在环（ring）$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ 中运算的第一个例子，在这个环里 10 的表现就像 1；同样的想法配合 $10 \equiv -1$，便得出判断能否被 11 整除的交错和检验法。把一个数与其各位数字的函数混在一起的方程，通常都正如这里般求解：用同余缩减可能性，再用增长估计令候选名单变得有限。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是一本很好的同余入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。