详细解答

STEP II 2020，第 4 题

纯数学 · 三角不等式

STEP II 2020，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

一切都建基于三角不等式（triangle inequality）：每条边都严格短于另外两条边之和。事实上，只需检查一条不等式，就是关于最长边的那一条，因为另外两条会自动成立。至于逆命题（converse），可以用圆规把三角形画出来：先画下一条边，再从它的两个端点各画一个圆。

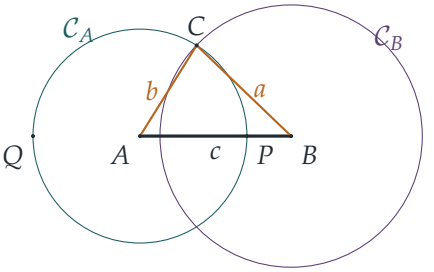
解答

第 (i) 部分

把顶点记为 A、B、C，其中 $BC = a$、$CA = b$、$AB = c$。直线段 AB 是由 A 到 B 的最短路径，所以长度为 $b + a$ 的路径 $A \to C \to B$ 至少是 c。它不可能等于 c：这只会在 C 位于线段 AB 上时发生，而那时根本没有三角形。因此 $c < a + b$。对另外两对顶点用同样的论证，便得到 $a < b + c$ 及 $b < a + c$。

第 (ii) 部分

画一条长度为 c 的线段 AB。以 A 为圆心、b 为半径画圆 $\mathcal{C}_A$，再以 B 为圆心、a 为半径画圆 $\mathcal{C}_B$。若两圆相交于直线 AB 以外的一点 C，则 ABC 是一个三角形，且 $CA = b$、$CB = a$、$AB = c$。



为甚么两圆必定相交？设 P 和 Q 为 $\mathcal{C}_A$ 与直线 AB 的交点，其中 P 与 B 位于 A 的同一侧。那么

$$PB = |c - b|, \qquad QB = c + b.$$

由于 $c - b < a$ 和 $b - c < a$ 正是已知不等式中的两条,所以 $|c - b| < a$;而 $c + b > a$ 就是第三条。因此, 当一点沿 $\mathcal{C}_A$ 的上半圆由 P 移动到 Q 时, 它与 B 的距离会连续（continuously）地由一个小于 a 的值变成一个大于 a 的值，所以在某处必定等于 a。这一点同时位于两个圆上，而且不在直线 AB 上，因为 $\mathcal{C}_A$ 在该直线上的点只有 P 和 Q，而它们与 B 的距离都不是 a。这就是所求的点 C，所以边长为 a、b、c 的三角形存在。

第 (iii) 部分

第 (i) 和第 (ii) 部分合起来说明：三个正数是某三角形的三边，当且仅当每一个都小于另外两个之和。记三者中最大的为 ℓ。若 ℓ 小于另外两个之和，则另外两条不等式立即成立，因为较小的每个数都不超过 ℓ，而余下的那个数是正数。所以我们只需检验最长的长度。

(A) 必然成立。 三个长度都是正数。利用 $c < a + b$,

$$c + 1 < a + b + 1 < (a + 1) + (b + 1),$$

另外两条不等式同理可得。

(B) 有时成立，但并非必然。 对于等边三角形（equilateral triangle），三个长度是 $1, 1, 1$，确实能组成三角形。但取 $a = b = 1$ 及 $c = \frac{1}{10}$，由于 $1 < 1 + \frac{1}{10}$，这是一个真正的三角形。三个长度变成 1、10、$\frac{1}{10}$，而 $10 > 1 + \frac{1}{10}$，所以不可能组成三角形。

(C) 永不成立。 三个长度关于 a、b、c 对称（symmetric）, 所以可以适当标记, 使 $a \geq b \geq c$。那么

$$|c - a| = a - c = (a - b) + (b - c) = |a - b| + |b - c|.$$

最大的长度等于另外两个之和，所以严格不等式不成立。（若 a, b, c 中有两个相等，则其中一个长度为 0，同样不成立。）

(D) 必然成立。 把 a、b、c 中任意两个互换，集合 $\{a^2+bc,\ b^2+ca,\ c^2+ab\}$ 都不变。（例如互换 a 和 b，得到 b^2+ac、a^2+cb、c^2+ba。）所以只需对每个三角形证明三条不等式中的一条，例如 $a^2+bc<(b^2+ca)+(c^2+ab)$。两者之差为

$$\begin{aligned}(b^2+ca)+(c^2+ab)-(a^2+bc) &= (b^2-bc+c^2)+a(b+c)-a^2\\ &= (b-\tfrac{1}{2}c)^2+\tfrac{3}{4}c^2+a(b+c-a).\end{aligned}$$

由于 $c>0$，第一个括号是正数；又由于 $a>0$ 且 $a<b+c$，所以 $a(b+c-a)>0$。因此两者之差为正数。另外两条不等式经重新标记即可得出，而三个长度显然都是正数，所以它们必然能组成三角形。

第 (iv) 部分

a、b、c 的角色可以互换，所以可以适当标记，使 $a\geq b\geq c$。$f(a)$、$f(b)$、$f(c)$ 三者都是正数。由于 f 是递增（increasing）函数，$f(a)\geq f(b)\geq f(c)$，所以根据第 (iii) 部分开首的说明，我们只需证明

$$f(a)<f(b)+f(c).$$

想一想 关于 $f(x)/x$ 的条件，怎样帮助我们比较 $f(a)$ 与 $f(b)+f(c)$?

它让我们可以用 $f(a)$ 的倍数，从下方为 $f(b)$ 和 $f(c)$ 定界。由于 $f(x)/x$ 随 x 增大而递减，且 $a\geq b$，

$$\frac{f(b)}{b}\geq\frac{f(a)}{a},\qquad\text{所以}\qquad f(b)\geq\frac{b}{a}f(a),$$

而等号只在 $b=a$ 时才可能成立。同理 $f(c)\geq\frac{c}{a}f(a)$。相加，得

$$f(b)+f(c)\ \geq\ \frac{b+c}{a}f(a)\ >\ f(a),$$

其中最后一步用到 $b+c>a$（由三角形得出）及 $f(a)>0$。所以三个新长度中最大的一个小于另外两个之和，因此 $f(a)$、$f(b)$、$f(c)$ 是某三角形的三边。

验算

- 对于 (D)，试取 $a=2$、$b=3$、$c=4$：三个长度是 16、17、22，而 $22<16+17$。把恒等式重新标记以配合最长的长度 c^2+ab，可预测差值为 $(a^2-ab+b^2)+c(a+b-c)=(4-6+9)+4\cdot1=11$，而事实上 $16+17-22=11$。
- 对于 (C)，三角形 $3,4,5$ 给出 $1,1,2$：正如预测，是一个退化成直线的“扁平”三角形。
- 用电脑对 200 000 个随机三角形进行检验，证实了 (A)、(D) 和 (C)（必然、必然、永不），发现 (B) 对其中约 40% 成立，并证实第 (iv) 部分对 $f(x)=\sqrt{x}$、$\ln(1+x)$、$x/(1+x)$、$x^{0.3}$ 及 $1-\mathrm{e}^{-x}$ 成立。

常见错误

- 只测试了一个三角形，便回答 (B) 是“永不”或“必然”：要回答“有时”，需要每种情况各举一个例子。
- 在 (D) 中只检查了一条不等式，却没有解释为何另外两条也成立：能够支持这一点的，是对称性（或关于最长边的说明）。
- 在 (iv) 中，当 a 可能等于 b 时写出 $f(a)/a < f(b)/b$；此时不等式应为 $\leq$，而严格不等号必须来自 $b + c > a$。

STEP 之外

三角不等式是度量（metric）的三条公理（axioms）之一；度量是距离的抽象概念，是大学一年级分析（analysis）和拓扑学（topology）的核心。第 (iv) 部分在那里是一个经典结果：若 d 是度量，而 f 是递增函数，且 $f(0) = 0$、$f(x)/x$ 递减，则 $f \circ d$ 也是度量；这就是为甚么 $d/(1 + d)$ 是构造有界（bounded）度量的标准方法。Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）是接触这些概念的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。