详细解答

STEP II 2020，第 3 题

纯数学 · 对数凹数列

STEP II 2020，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

性质 L 表示每个比值 u_{r+1}/u_r 都不大于前一个比值，所以数列一旦停止上升，就不可能再次上升。这正是单峰性（unimodality）。在第 (ii) 部分，递推关系（recurrence）的辅助方程（auxiliary equation）有重根（repeated root）α，而组合 $u_r - \alpha u_{r-1}$ 把它化为一个简单的等比数列（geometric sequence）。其余一切都由这一个代换推出。

解答

第 (i) 部分

假设数列具有性质 L，且 $u_{r-1} \geq u_r$，其中 $2 \leq r \leq n-1$。由于 $u_{r-1} > 0$，我们可以把性质 L 两边除以它：

$$u_{r+1} \leq \frac{u_r^2}{u_{r-1}} = u_r \cdot \frac{u_r}{u_{r-1}} \leq u_r,$$

最后一步用到 $u_r/u_{r-1} \leq 1$ 及 $u_r > 0$。因此 $u_{r-1} \geq u_r \implies u_r \geq u_{r+1}$。

现在考虑任何具有性质 L 的数列。若 $u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n$，则它是单峰的，且 $k = n$。否则，存在第一个指标 k 使得 $u_k > u_{k+1}$（故 $k \leq n-1$）。由 k 的选取，

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_k.$$

由于 $u_k \geq u_{k+1}$，刚才证明的蕴涵（取 $r = k+1$）给出 $u_{k+1} \geq u_{k+2}$；再取 $r = k+2$ 应用一次，得 $u_{k+2} \geq u_{k+3}$，如此以归纳法（induction）一直推至 $u_{n-1} \geq u_n$。因此 $u_k \geq u_{k+1} \geq \cdots \geq u_n$，数列是单峰的。

第 (ii) 部分

对 $2 \le r \le n$，记 $v_r = u_r - \alpha u_{r-1}$。对 $3 \le r \le n$，递推关系给出

$$v_r = 2\alpha u_{r-1} - \alpha^2 u_{r-2} - \alpha u_{r-1} = \alpha\left(u_{r-1} - \alpha u_{r-2}\right) = \alpha v_{r-1}.$$

所以 (v_r) 是公比为 α 的等比数列，且 $v_r = \alpha^{r-2} v_2$，即

$$u_r - \alpha u_{r-1} = \alpha^{r-2}(u_2 - \alpha u_1) \qquad (2 \le r \le n).$$

（当 $r = 2$ 时此式显然成立，而 r 每增加一，两边都乘以 α。）

对 $2 \le r \le n-1$，我们有 $3 \le r+1 \le n$，因此可以代入 $u_{r+1} = 2\alpha u_r - \alpha^2 u_{r-1}$：

$$u_r^2 - u_{r-1}u_{r+1} = u_r^2 - 2\alpha u_r u_{r-1} + \alpha^2 u_{r-1}^2 = (u_r - \alpha u_{r-1})^2.$$

正数且单峰。假设 $u_2 > \alpha u_1 > 0$。由于 $\alpha > 0$，这给出 $u_1 > 0$，而 $u_2 > 0$ 亦成立。至于之后的项，第一个恒等式给出

$$u_r = \alpha u_{r-1} + \alpha^{r-2}(u_2 - \alpha u_1) > \alpha u_{r-1},$$

因为 $\alpha^{r-2} > 0$ 及 $u_2 - \alpha u_1 > 0$。所以若 $u_{r-1} > 0$，则 $u_r > 0$；由归纳法，每一项都是正数。现在第二个恒等式给出：对 $2 \le r \le n-1$，$u_{r-1}u_{r+1} = u_r^2 - (u_r - \alpha u_{r-1})^2 \le u_r^2$。这就是正项数列的性质 L，所以由第 (i) 部分，数列是单峰的。

$u_1 = 1$、$u_2 = 2$ 的情况。设 $w_r = (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2}$。则 $w_1 = 1 = u_1$ 及 $w_2 = 2 = u_2$。在这些初始值下，第一个恒等式写成

$$u_r = \alpha u_{r-1} + (2-\alpha)\alpha^{r-2}.$$

假设对某个满足 $3 \le r \le n$ 的 r，有 $u_{r-1} = w_{r-1}$。那么

$$\begin{aligned} u_r &= \alpha\left[(3-r)\alpha^{r-2} + 2(r-2)\alpha^{r-3}\right] + 2\alpha^{r-2} - \alpha^{r-1} \\ &= (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2} = w_r, \end{aligned}$$

所以由归纳法，对 $1 \le r \le n$，$u_r = (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2}$。（我们同样可以用原来的递推关系进行两步归纳；但一阶的形式较快捷。）

$\alpha = 1 - \frac{1}{N}$ 时的最大值。此时 $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$，所以 $u_2 = 2 > \alpha = \alpha u_1 > 0$，由上面的推导，数列是正数且单峰的。要找出峰值，可考察相邻项之差。由 $u_{r+1} = \alpha u_r + (2-\alpha)\alpha^{r-1}$ 及 $\alpha - 1 = -\frac{1}{N}$，

$$u_{r+1} - u_r = (2-\alpha)\alpha^{r-1} - \frac{u_r}{N} = \frac{\alpha^{r-2}}{N}\Big[N\alpha(2-\alpha) - (2-r)\alpha - 2(r-1)\Big].$$

由于 $N\alpha = N-1$ 及 $2-\alpha = \frac{N+1}{N}$，所以 $N\alpha(2-\alpha) = N - \frac{1}{N}$，而 $(2-r)\alpha = 2-r-\frac{2-r}{N}$。方括号化简为

$$N - \frac{1}{N} - 2 + r + \frac{2-r}{N} - 2r + 2 = (N-r) - \frac{r-1}{N} = \frac{N^2+1-r(N+1)}{N},$$

因此

$$u_{r+1} - u_r = \frac{\alpha^{r-2}}{N^2}\Big(N^2+1-r(N+1)\Big).$$

想一想 $N^2+1-r(N+1)$ 究竟在哪里变号？它有可能等于零吗？

它只在 $r = \dfrac{N^2+1}{N+1} = N-1+\dfrac{2}{N+1}$ 时为零。由于 $N \geq 2$，我们有 $0 < \frac{2}{N+1} < 1$，所以这个值严格介乎整数 $N-1$ 与 N 之间。由于 $\alpha^{r-2} > 0$：

- 当 $r \leq N-1$ 时，$u_{r+1} > u_r$；
- 当 $r \geq N$ 时，$u_{r+1} < u_r$。

因此 $u_1 < u_2 < \cdots < u_N$ 且 $u_N > u_{N+1} > \cdots > u_n$。由于 $N \leq n$，项 u_N 存在，而 u_r 在 $r = N$ 时取最大值（严格最大，没有并列）。

验算

取 $N = 5$，则 $\alpha = \frac{4}{5}$。递推关系给出 1, 2, 2.56, 2.816, 2.8672, 2.78528, 2.62144, …，在 $r = 5$ 升至峰值，之后下降，与所述相符。差的公式预测 $u_6 - u_5 = \alpha^3(26-30)/25 = -0.08192$，结果吻合。此外，$u_3 = 2\alpha \cdot 2 - \alpha^2 = 2.56$ 与闭合形式 $-\alpha^2 + 4\alpha$ 一致。这些恒等式及峰值位置亦已用电脑以精确算术，就多组 α、u_1、u_2 的值及 N 直至 29 验证过。

常见错误

- 在第 (i) 部分除以 u_{r-1} 时，没有指出它是正数。对于含负项的数列，这个论证并不成立。
- 在第 (ii) 部分引用第 (i) 部分之前，忘记证明各项为正数，而第 (i) 部分需要正性。
- 只证明 $u_{N+1} < u_N$ 及 $u_{N-1} < u_N$。由于单峰性，这已经足够，但你必须说明这一点；较简洁的做法是找出每一个差的正负号。

STEP 之外

性质 L 称为对数凹性（log-concavity）：$\ln u_r$ 是 r 的凹函数（concave function）。对数凹数列在组合数学和概率中随处可见。二项式系数（binomial coefficients）$\binom{n}{r}$ 就是一个例子，而牛顿（Newton）不等式指出，只有实根的多项式，其系数是对数凹的。第 (ii) 部分的递推关系是一个带重根的线性递推关系，这就是为甚么解具有 $(A+Br)\alpha^r$ 的形式，正如微分方程（differential equations）出现重根时会得到 $(A+Bx)\mathrm{e}^{\alpha x}$。关于这种类比在微分方程方面的内容，可参阅 Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）；至于同类风格的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学问题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。