详细解答

STEP II 2020，第 2 题

纯数学 · 可分离变量微分方程

STEP II 2020，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

这条微分方程（differential equation）可以分离变量（separation of variables）；积分之后，最自然要考察的是乘积 xy，而它原来是 2 的幂。接着利用恒等式（identity）$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$，便可把一切改写成以和 $s=x+y$ 及差 $d=x-y$ 表示。在这两个变量下，每条曲线都变成“d^2 等于某个 s 的函数”，而描绘曲线的关键，就在于找出该函数在哪里非负。

解答

第 (i) 部分

先把右方因式分解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(kx-1)}{x(1-ky)} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1-ky}{y}\,\mathrm{d}y=\frac{kx-1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

积分得 $\ln|y|-ky=kx-\ln|x|+c$，即

$$\ln|xy|=k(x+y)+c.$$

在两条曲线上，x 与 y 皆同号，所以 $|xy|=xy$。由于 $k=\ln 2$，取指数得 $xy=A\,2^{x+y}$，其中 A 为正常数。

曲线 C_1。在 $(1,1)$ 处得 $1=4A$，所以 $A=\frac{1}{4}$，且 $4xy=2^{x+y}$。又 $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$，故

$$(x-y)^2=(x+y)^2-2^{x+y},$$

其中 $x,y>0$。这就是所求的结果。

曲线 C_2。在 $(-1,-1)$ 处得 $1 = A \cdot 2^{-2}$，所以 $A = 4$，且 $4xy = 16 \cdot 2^{x+y} = 2^{x+y+4}$。因此

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 2^{x+y+4},$$

其中 $x, y < 0$。

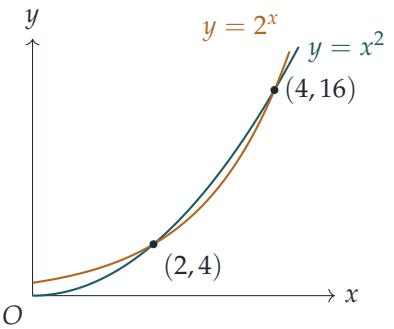
对称性。把 x 与 y 互换，$x+y$ 不变，$(x-y)^2 = (y-x)^2$ 亦不变，所以每条方程都不变。符号条件（$x, y > 0$ 或 $x, y < 0$）同样不变。因此只要 (a,b) 在曲线上，它关于 $y = x$ 的反射点 (b,a) 也在曲线上。故 $y = x$ 是每条曲线的对称轴（line of symmetry）。

第 (ii) 部分

当 $x \geq 0$ 时，曲线 $y = x^2$ 与 $y = 2^x$ 相交于 $(2,4)$ 及 $(4,16)$，而且只有这两个交点。要说明这一点，可比较对数：设 $x > 0$ 时 $g(x) = 2\ln x - x\ln 2$。则 $g'(x) = \frac{2}{x} - \ln 2$，所以 g 在 $x = 2/\ln 2$ 之前递增，之后递减。因此 g 至多有两个零点，而 $g(2) = g(4) = 0$。故

$$x^2 \geq 2^x \iff 2 \leq x \leq 4 \qquad (x > 0),$$

而在 $[0,2)$ 及 $(4,\infty)$ 上，2^x 位于 x^2 之上。



现在取 C_1 上一点，并设 $s = x + y > 0$。C_1 方程的左方是一个平方，所以

$$s^2 - 2^s = (x-y)^2 \geq 0, \qquad \text{即} \qquad s^2 \geq 2^s.$$

由上图可见，这迫使 $2 \leq s \leq 4$。所以 C_1 位于直线 $x + y = 2$ 与 $x + y = 4$ 之间。

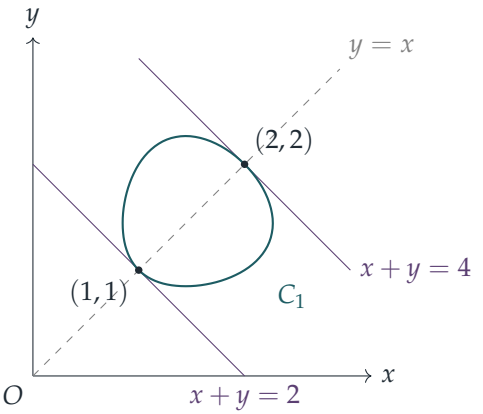
> ? **想一想** $[2,4]$ 中每一个 s 值是否真的都能取到？曲线在两端又是甚么样子？

对每个 $s \in [2,4]$，设 $d = \pm\sqrt{s^2 - 2^s}$，以及 $x = \frac{1}{2}(s+d)$、$y = \frac{1}{2}(s-d)$。由于 $2^s > 0$，有 $|d| < s$，所以 x 与 y 皆为正。因此每个这样的 s 都对应 C_1 上的点，当 $2 < s < 4$ 时更对应两点。所以这条曲线是一个闭环：

- 当 $s = 2$ 及 $s = 4$ 时 $d = 0$，得出 $y = x$ 上的点 $(1,1)$ 及 $(2,2)$。两点都满足 $kxy - y = -(x - kxy)$，所以该处的斜率（gradient）为 -1。闭环在这两点分别与直线 $x + y = 2$ 及 $x + y = 4$ 相切。

- 在 $x = 1/\ln 2 \approx 1.44$ 处斜率为 0，在 $y = 1/\ln 2$ 处斜率为无穷大。在 $x = 1/\ln 2$ 处，闭环上有 $y \approx 0.85$（最低点）及 $y \approx 2.27$（最高点）。
- 它横跨 $y = x$ 的最大宽度出现在 $s^2 - 2^s$ 取最大值之处，即 $s \approx 3.21$，此时 $|d| \approx 1.02$。

这个闭环是一个卵形，关于 $y = x$ 对称，夹在两条直线之间：



第 (iii) 部分

现在 $s = x + y < 0$。设 $t = -s > 0$。与之前一样，我们需要

$$s^2 \geq 2^{s+4} \iff t^2 \geq 2^{4-t} \iff t^2\, 2^t \geq 16.$$

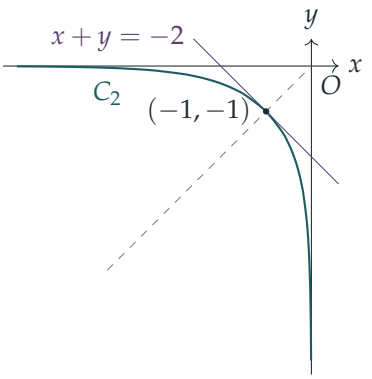
函数 $t^2\, 2^t$ 在 $t > 0$ 时递增，且在 $t = 2$ 时等于 16。所以条件是 $t \geq 2$，即 $x + y \leq -2$。（等价地，在 $x < 0$ 时描绘 $y = x^2$ 与 $y = 2^{x+4}$，只有当 $x \leq -2$ 时抛物线才在上方。）对每个 $s \leq -2$，用与 (ii) 相同的构造可得两个满足 $x, y < 0$ 的点，唯独 $s = -2$ 只给出单一点 $(-1, -1)$。所以这次 C_2 是无界的：

- 它只在 $(-1, -1)$ 与 $y = x$ 相交，该处斜率同样是 -1，所以它在该点与直线 $x + y = -2$ 相切。
- 当 $x, y < 0$ 时，$kx - 1 < 0$ 且 $1 - ky > 0$，所以

  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(kx - 1)}{x(1 - ky)} < 0,$$

  因为分子为正而分母为负。所以随着 x 增加，y 持续递减。
- 由 $xy = 4 \cdot 2^{x+y}$：当 $x \to -\infty$ 时，乘积 xy 趋向 0，所以 $y \to 0^-$（事实上 $y \approx 4 \cdot 2^x / x$）。由对称性，当 $x \to 0^-$ 时 $y \to -\infty$。负半轴都是渐近线（asymptote）。

所以 C_2 看起来像第三象限中直角双曲线（rectangular hyperbola）的一支，但它贴近坐标轴的程度紧密得多：



验算

- 对 $4xy = 2^{x+y}$ 作隐函数求导（implicit differentiation）：$4y + 4xy' = k\,2^{x+y}(1+y') = 4kxy(1+y')$。整理后得 $y' = \dfrac{kxy - y}{x - kxy}$，正是原方程。$C_2$ 的情况同样成立。
- $(2,2)$ 在 C_1 上：$4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 = 2^4$。在 C_2 上，满足 $x + y = -4$ 的点约为 $(-3.936, -0.064)$，此时 $xy \approx 0.252$，而 $4 \cdot 2^{-4} = 0.25$。上文所引卵形的极端点已用电脑核实。

常见错误

- 积分 $1/x$ 和 $1/y$ 时忘记加上绝对值符号（modulus）。对 C_2 而言这一点很重要，常数应得 $A = 4$，而不是 $\frac{1}{4}$。
- 只证明 $(x+y)^2 \geq 2^{x+y}$ 便停下来。你还必须解释为何这把 $x + y$ 限制在 $[2,4]$ 之内，而这正是 x^2 与 2^x 的比较图派上用场之处。
- 把 C_2 画成穿过坐标轴。在 C_2 上两个坐标都保持为负，而坐标轴是渐近线。

STEP 之外

把坐标转换为 $s = x + y$、$d = x - y$，可将一条对称的方程化为“$d^2 = f(s)$”。曲线恰好存在于 $f(s) \geq 0$ 之处：若该集合是有界区间，曲线便是闭环；若是半直线，曲线便是无界的。同样的推理可以从守恒量（conserved quantity）描绘相图（phase portrait）：$\ln(xy) - k(x+y)$ 沿每条解都是常数，正如 Lotka–Volterra 捕食者—猎物方程（predator–prey equations）中的能量一样；该方程的轨道也正因同样的理由而是闭环。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵盖了这两个概念。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。