详细解答

STEP II 2020，第 12 题

概率与统计 • 不公平骰子的不等式

STEP II 2020，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

各概率（probability）之和必须等于 1，所以各偏差（bias）满足 $\sum \varepsilon_i = 0$。把这一点写下来之后，展开 $\sum(\frac{1}{n} + \varepsilon_i)^2$ 时所有一次项都会消失，剩下的式子一眼就看得出是非负的。第 (ii) 部分其实是第 (i) 部分换了个样子：把一组正数各自除以它们的总和，就得到某颗骰子（die）的各个概率。

解答

设 $p_i = \mathrm{P}(X = i) = \frac{1}{n} + \varepsilon_i$。由于 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$，

$$1 = n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0.$$

另外每个 $p_i \geq 0$，所以对每个 i 都有 $\varepsilon_i \geq -\frac{1}{n}$。以下所有求和都是对 $i = 1, \ldots, n$ 进行。

第 (i) 部分

两次掷骰是独立（independent）的，所以两次都掷出 i 的概率是 p_i^2，而对不同的 i，这些事件互斥（disjoint）。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{两次点数相同}) &= \sum p_i^2 = \sum \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2\varepsilon_i}{n} + \varepsilon_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sum \varepsilon_i + \sum \varepsilon_i^2 = \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2.\end{aligned}$$

对公平的骰子，每个 $\varepsilon_i = 0$，概率为 $\frac{1}{n}$。对有偏差的骰子，ε_i 不全为零，所以 $\sum \varepsilon_i^2 > 0$。因此，有偏差的骰子在连续两次掷骰中掷出相同点数的可能性，高于公平的骰子。

第 (ii) 部分

先改写这个二重和。它把所有 $j < i$ 的 $x_i x_j$ 加起来，也就是说，每一对不同下标组成的无序对恰好加一次。把 $S = \sum x_i$ 平方，会得到每个 x_i^2 各一次，以及每个这样的无序对各两次，所以

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j = \frac{1}{2}\left(S^2 - \sum x_i^2\right).$$

> **想一想** 当 x_i 只是任意的正数时，骰子从何而来?

设 $p_i = x_i / S$。这些数都是正数，而且总和为 1，所以它们是某颗 n 面骰子的各个概率。由第 (i) 部分，$\sum p_i^2 = \frac{1}{n} + \sum \varepsilon_i^2 \geq \frac{1}{n}$（等号成立当且仅当骰子是公平的，即所有 x_i 相等）。两边乘以 $S^2 > 0$，

$$\sum x_i^2 \geq \frac{S^2}{n}.$$

因此

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j = \frac{1}{2}\left(S^2 - \sum x_i^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(S^2 - \frac{S^2}{n}\right) = \frac{n-1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2,$$

这正是所求的不等式（inequality）。当所有 x_i 相等时，等号成立。

第 (iii) 部分

现在概率是 $\sum p_i^3$。展开，并再次利用 $\sum \varepsilon_i = 0$，

$$\begin{aligned}\sum p_i^3 &= \sum \left(\frac{1}{n^3} + \frac{3\varepsilon_i}{n^2} + \frac{3\varepsilon_i^2}{n} + \varepsilon_i^3\right) \\ &= \frac{1}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3\varepsilon_i^2}{n} + \varepsilon_i^3\right) = \frac{1}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \left(\frac{3}{n} + \varepsilon_i\right).\end{aligned}$$

对公平的骰子，这个值是 $\frac{1}{n^2}$。

> **想一想** 立方项 ε_i^3 可以是负数。它们会不会盖过平方项?

不会，因为偏差不可能负得太多：由 $p_i \geq 0$ 得 $\varepsilon_i \geq -\frac{1}{n}$，所以

$$\frac{3}{n} + \varepsilon_i \geq \frac{2}{n} > 0.$$

因此每一项 $\varepsilon_i^2\left(\frac{3}{n} + \varepsilon_i\right)$ 都 ≥ 0，而且只要 $\varepsilon_i \neq 0$ 就严格大于零；对有偏差的骰子，至少有一个 i 满足这个条件。所以

$$\sum p_i^3 > \frac{1}{n^2},$$

即有偏差的骰子在连续三次掷骰中掷出相同点数的可能性，同样高于公平的骰子。

验算

- 取 $n = 4$, 各概率为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$, 于是 $\varepsilon = \frac{1}{4}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{12}$。直接计算得 $\sum p_i^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{36} = \frac{1}{3}$，而 $\frac{1}{4} + \sum \varepsilon_i^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{3}{144} = \frac{1}{3}$，比公平骰子的 $\frac{1}{4}$ 大。掷三次时，$\sum p_i^3 = \frac{1}{8} + \frac{3}{216} = \frac{5}{36} \approx 0.139$，远高于公平骰子的 $\frac{1}{16} = 0.0625$。
- 最极端的骰子总是掷出 1：这时两个概率都是 1，即最大可能值。
- 在 (ii) 中，当 $n = 2$ 时不等式变成 $x_1 x_2 \le \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2$，这正是算术–几何平均不等式（AM–GM）。(i)、(ii) 和 (iii) 中的不等式亦已用电脑在数以千计的随机例子上验证过。

常见错误

- 忘记 $\sum \varepsilon_i = 0$，结果留下一些正负号未知的一次项。
- 在 (iii) 中，没有用 $\varepsilon_i \ge -\frac{1}{n}$，就断言 $\sum \varepsilon_i^3$ “很小”或可正可负；正是这个界令论证成立。
- 在 (ii) 中，把第 (i) 部分直接用在 x_i 本身，而不是用在 $x_i / \sum x_j$ 上；x_i 的总和不一定是 1。

STEP 之外

$\sum p_i^2$ 这个量称为一个分布的*碰撞概率*（collision probability），第 (i) 部分说明它在均匀分布（uniform distribution）时最小；第 (iii) 部分则是关于 $\sum p_i^3$ 的同一结论。两者都是函数 $t \mapsto t^k$ 的凸性（convexity）——即延森不等式（Jensen's inequality）——或幂平均不等式（power-mean inequality）的特例；而 $\sum p_i^k$ 的对数则给出信息理论（information theory）和密码学（cryptography）中使用的雷尼熵（Rényi entropy）。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）是在概率框架下认识这些概念的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。