详细解答

STEP II 2020，第 11 题

概率与统计 • 掷硬币中的游程

> **STEP II 2020，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

这个游戏几乎没有“记忆”：任何时刻，重要的只是最近一次掷出哪一面，以及目前连续（run）的长度。特别地，一旦掷出的面改变，游戏所处的局面就与“这新的一面是第一次投掷”完全相同。因此我们以第一次投掷为条件（conditioning），把“已知第一掷为正面时 A 获胜的概率（probability）”用“已知第一掷为反面时 A 获胜的概率”表示，反之亦然。这样便得到两条联立线性方程（simultaneous linear equations）。

解答

全文假设 $0 < p < 1$。（若 $p = 0$ 或 $p = 1$，每次掷出的都是同一面，游戏会在第二或第三次投掷时结束，答案是显然的。）记

$$\alpha = \mathrm{P}(\text{A 获胜} \mid \text{第一掷为 H}), \qquad \beta = \mathrm{P}(\text{A 获胜} \mid \text{第一掷为 T}).$$

各次投掷是独立（independent）的，所以任何一次投掷之后发生的事，只取决于之后尚未进行的投掷。

第 (i) 部分

游戏必定结束。掷了 n 次后游戏仍未结束，当且仅当到目前为止没有两次相邻投掷结果相同，即首 n 次投掷交替出现：$HTHT\ldots$ 或 $THTH\ldots$。当 $n = 2m$ 时，这两个序列各含 m 个正面和 m 个反面，所以

$$\mathrm{P}(\text{掷 } 2m \text{ 次后仍未结束}) = 2p^m q^m = 2(pq)^m \leq 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^m,$$

因为 $pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$。事件“游戏永不结束”包含于上述每一个事件之中，因此对每一个 m，它的概率至多为 $2\left(\frac{1}{4}\right)^m$；令 $m \to \infty$，即知这概率为 0。

已知第一掷为正面。考虑第二次投掷。

- 以概率 p 掷出正面，A 立即获胜。
- 以概率 q 掷出反面。这时之前的正面已无关重要：B 还需要再多一个反面，A 需要连续两个正面，情况与这个反面是第一次投掷完全一样。所以此后 A 获胜的概率为 β。

同理，若第一掷为反面，则第二掷为反面时 B 立即获胜；第二掷为正面时，我们便处于“第一掷为正面”的局面。因此

$$\alpha = p + q\beta, \qquad \beta = p\alpha.$$

把第二条方程代入第一条，得 $\alpha = p + pq\,\alpha$，所以

$$\alpha = \frac{p}{1-pq},$$

正如所求（$1 - pq \geq \frac{3}{4} > 0$）。于是 $\beta = \dfrac{p^2}{1-pq}$。

整体概率。以第一次投掷为条件，

$$\mathrm{P}(\text{A 获胜}) = p\alpha + q\beta = \frac{p^2 + p^2 q}{1-pq} = \frac{p^2(1+q)}{1-pq}.$$

第 (ii) 部分

现在 α 和 β 指的是需要连续三次的游戏。假设第一掷为正面。

- HH 之后再掷出 H，概率为 p^2：A 获胜。
- HHT，概率为 pq；或 HT，概率为 q：自开局以来第一个反面刚刚出现，之前的正面不再计算，所以我们处于“第一掷为反面”的局面，A 获胜的概率为 β。

这些情况涵盖了所有可能，所以

$$\alpha = p^2 + (q + pq)\,\beta,$$

这正是题目所给的结果。把两面的角色互换（在“第一掷为反面”的局面下，TTT 令 B 获胜，对 A 的概率贡献为 0），得

$$\beta = (p + pq)\,\alpha.$$

想一想 因子 $q+pq$ 和 $p+pq$ 怎样变成 $1-p^2$ 和 $1-q^2$?

由于 $p+q=1$，我们有 $q+pq=q(1+p)=(1-p)(1+p)=1-p^2$，同理 $p+pq=p(1+q)=1-q^2$。这也可以直接理解：$1-p^2$ 是开局掷出正面后，接着两次投掷不全是正面的概率，而这恰恰就是连续被打断的情况。所以方程组为

$$\alpha = p^2 + (1-p^2)\beta, \qquad \beta = (1-q^2)\alpha,$$

代入后得 $\alpha\left[1-(1-p^2)(1-q^2)\right]=p^2$，即

$$\alpha = \frac{p^2}{1-(1-p^2)(1-q^2)}.$$

（分母为正，因为 $0<1-p^2<1$ 且 $0<1-q^2<1$。）最后，

$$\mathrm{P}(\text{A 获胜}) = p\alpha + q\beta = \alpha\big(p+q(1-q^2)\big) = \alpha\left(p+q-q^3\right) = \alpha\left(1-q^3\right),$$

所以

$$\mathrm{P}(\text{A 获胜}) = \frac{p^2(1-q^3)}{1-(1-p^2)(1-q^2)},$$

正如所求。

第 (iii) 部分

同样的论证适用于长度为 a 和 b 的连续。已知第一掷为正面，要么接着的 $a-1$ 次投掷全是正面（概率 p^{a-1}），A 获胜；要么其中出现反面（概率 $1-p^{a-1}$）。在后一情况下，游戏就从那个反面重新开始，令我们处于“第一掷为反面”的局面。同理，已知第一掷为反面，B 以概率 q^{b-1} 获胜，否则在 B 的连续完成之前会出现正面。所以

$$\alpha = p^{a-1} + \left(1-p^{a-1}\right)\beta, \qquad \beta = \left(1-q^{b-1}\right)\alpha,$$

因此

$$\alpha = \frac{p^{a-1}}{1-\left(1-p^{a-1}\right)\left(1-q^{b-1}\right)}.$$

分母同样为正，因为两个括号的值都严格介乎 0 与 1 之间。于是

$$p\alpha + q\beta = \alpha\left(p+q-q^b\right) = \alpha\left(1-q^b\right),$$

所以

$$\boxed{\mathrm{P}(\text{A 获胜}) = \frac{p^{a-1}\left(1-q^b\right)}{1-\left(1-p^{a-1}\right)\left(1-q^{b-1}\right)}}$$

如果你喜欢，分母可展开为 $p^{a-1}+q^{b-1}-p^{a-1}q^{b-1}$。

$a = b = 2$ **的情况**。公式变成

$$\frac{p(1-q^2)}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{p(1-q)(1+q)}{1-pq} = \frac{p^2(1+q)}{1-pq},$$

其中分母用了 $1-p=q$、$1-q=p$，分子用了 $1-q=p$。这与第 (i) 部分一致。代入 $a=b=3$ 则恰好还原第 (ii) 部分的结果。

验算

- *公平硬币，第 (i) 部分。*当 $p=q=\frac{1}{2}$ 时，答案为 $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}/\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$，与对称性的要求相符。在 (iii) 中，只要 $a=b$ 且 $p=\frac{1}{2}$，结果也是如此。
- *极端情况。*当 $p\to 1$ 时，(iii) 的答案趋向 1；当 $p\to 0$ 时，它趋向 0，理应如此。
- *数值。*当 $p=0.4$ 时，第 (i) 部分的答案为 $0.16\times 1.6/0.76\approx 0.3368$，第 (ii) 部分的答案约为 ≈ 0.2713。以电脑模拟 200 000 局游戏，得到 0.336 和 0.271。当 $p=0.55$、$a=4$、$b=2$ 时，公式给出 0.2450，同样与模拟结果吻合。

常见错误

- 忘记了一旦掷出的面改变，之前的连续便完全不算数。正因如此，改变之后的局面才与“该面为第一掷”相同。
- 在 (ii) 中漏掉 HHT 的情况：连续可以在第二次或第三次投掷时被打断。
- 把 α 当作“A 获胜的概率”的最终答案。你仍须对第一次投掷取平均，即 $p\alpha+q\beta$。

STEP 之外

这是对吸收马尔可夫链（absorbing Markov chain）的首步分析（first-step analysis）。状态是“目前的面及连续的长度”，而吸收概率满足以下一步为条件所得的线性方程。同样的技巧可以求出掷硬币时各种图案的期望等待时间，并引申至彭尼游戏（Penney's game）：在该游戏中，图案的先后次序会产生一些令人意外的非传递（non-transitive）结果。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）以合适的程度讲解了马尔可夫链与吸收。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。