详细解答

STEP II 2020，第 10 题

力学 · 能量与平衡

STEP II 2020，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

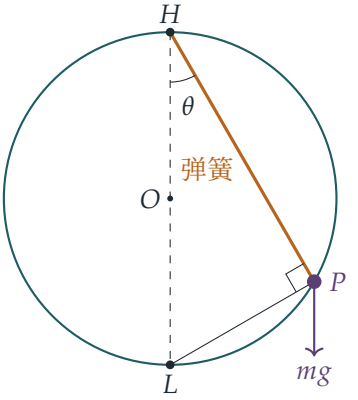
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

由于 HL 是直径（diameter），利用“半圆上的圆周角是直角”（angle in a semicircle），弹簧长度和 P 的高度都可以直接用 θ 表示：$HP = 2a\cos\theta$，而 P 的高度比 H 低 $2a\cos^2\theta$。金属线（wire）是光滑的，所以它的反作用力（reaction）不做功。于是整道题只涉及一个函数，就是以 $c = \cos\theta$ 为自变量的势能（potential energy）。结果它是关于 c 的二次式（quadratic），配方后两部分便能一并解决。

解答

将 P 视为光滑金属线上的质点（particle），并把弹簧视为轻弹簧，遵从胡克定律（Hooke's law）（无论处于拉伸还是压缩状态）。设 O 为圆心。



几何关系。由于 HL 是直径，$\angle HPL = 90°$，因此在斜边为 $2a$ 的直角三角形 HPL 中，

$$HP = 2a\cos\theta.$$

由 H 到 P 的垂直落差为 $HP\cos\theta = 2a\cos^2\theta$。当 P 从 L 沿任一侧绕向 H 时，θ 的取值范围是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，所以 $\cos\theta > 0$。

势能。取 H 所在的水平为重力势能(gravitational potential energy)的零点,并记 $c = \cos\theta$。弹簧的伸长量（extension）为 $2ac - l$，所以

$$\begin{aligned} V &= -2mga\,c^2 + \frac{\lambda}{2l}(2ac - l)^2 \\ &= \frac{2a(a\lambda - mgl)}{l}\,c^2 - 2a\lambda\,c + \frac{\lambda l}{2}. \end{aligned}$$

第 (i) 部分

光滑金属线的反作用力不做功, 因此 P 处于平衡(equilibrium)当且仅当 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$。(等价地说，沿切线方向的力互相平衡。）由连锁法则（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}c} = -\sin\theta\left(\frac{4a(a\lambda - mgl)}{l}\,c - 2a\lambda\right).$$

在 $\theta = \alpha$ 处（其中 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$），$\sin\alpha \neq 0$，因此括号内的式子必须为零：

$$\frac{4a(a\lambda - mgl)}{l}\cos\alpha = 2a\lambda.$$

右方不为零，所以 $a\lambda \neq mgl$，故可以相除：

$$\cos\alpha = \frac{\lambda l}{2(a\lambda - mgl)},$$

此即所求。

要使这样的 α 存在，须有 $0 < \cos\alpha < 1$。

- $\cos\alpha > 0$：分子 λl 为正，故须 $a\lambda > mgl$。
- $\cos\alpha < 1$：两边乘以正数 $2(a\lambda - mgl)$，得 $\lambda l < 2a\lambda - 2mgl$，即 $\lambda(2a - l) > 2mgl$。

由于 $l < 2a$,第二个条件即 $\lambda > \dfrac{2mgl}{2a - l}$。这亦蕴含第一个条件,因为 $\dfrac{2mgl}{2a - l} > \dfrac{2mgl}{2a} = \dfrac{mgl}{a}$。所以 $\alpha > 0$ 的平衡位置存在，仅当 $\lambda > \dfrac{2mgl}{2a - l}$。（反之，若此条件成立，该公式给出一个真正的角 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$，而由对称性（symmetry），$-\alpha$ 亦是平衡位置。）

第 (ii) 部分

? **想一想** 有没有一个巧妙的方法改写 V，使 $\cos\alpha$ 单独出现?

有：配方（completing the square）。记 $K = \dfrac{2a(a\lambda - mgl)}{l}$。由第 (i) 部分，$\dfrac{a\lambda - mgl}{l} = \dfrac{\lambda}{2\cos\alpha}$，所以

$$K = \frac{a\lambda}{\cos\alpha}, \qquad \frac{2a\lambda}{K} = 2\cos\alpha.$$

因此

$$V = K\left(c^2 - 2c\cos\alpha\right) + \frac{\lambda l}{2} = \frac{a\lambda}{\cos\alpha}(c - \cos\alpha)^2 + \text{常数}.$$

（作为验证，此式在 $c = \cos\alpha$ 处取最小值，正是第 (i) 部分求得的平衡位置。）按第 (i) 部分中平衡位置存在所需的条件，我们假设 $a\lambda > mgl$，于是 $\cos\alpha > 0$ 且 $K > 0$。

在 L 处，$\theta = 0$ 且 $c = 1$。对 L 与一般位置应用能量守恒（conservation of energy），得

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mu^2 + \frac{a\lambda}{\cos\alpha}\left[(1 - \cos\alpha)^2 - (c - \cos\alpha)^2\right].$$

两边乘以 $\dfrac{\cos\alpha}{a\lambda} > 0$，

$$\frac{mv^2\cos\alpha}{2a\lambda} = D - (c - \cos\alpha)^2, \qquad \text{其中} D = (1 - \cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha. \qquad (*)$$

所以若 P 在 $\theta = \beta$ 处静止，则该处 $v = 0$，且

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 = (1 - \cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha,$$

这就是所求的方程。

? **想一想** 这个方程对 $\cos\beta$ 有两个根。哪一个才是真正的停止点？它又在甚么情况下位于 H 之前?

当 P 从 L 升向 H 时，c 由 1 递减至 0。由 $(*)$，只要 $(c - \cos\alpha)^2 < D$，P 便会继续运动；所以质点首次停下之处，就是 c 从 1 往下减少时碰到区间 $(\cos\alpha - \sqrt{D},\ \cos\alpha + \sqrt{D})$ 较近一端的位置。现在 $D \geq (1 - \cos\alpha)^2$（若 $u > 0$ 则严格不等），所以 $\cos\alpha + \sqrt{D} > 1$ 且 $\cos\alpha - \sqrt{D} < 1$。因此 $c = 1$ 位于区间之内，而停止时的值为

$$\cos\beta = \cos\alpha - \sqrt{D}.$$

P 在到达 H（该处 $c = 0$）之前停下，当且仅当此值为正，即 $\sqrt{D} < \cos\alpha$，亦即 $D < \cos^2\alpha$：

$$\begin{aligned} & (1-\cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha < \cos^2\alpha \\ \iff \quad & 1 - 2\cos\alpha + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha < 0 \\ \iff \quad & \frac{mu^2}{2a\lambda} < 2 - \sec\alpha, \end{aligned}$$

最后一步两边除以 $\cos\alpha > 0$。因此，P 在到达 H 之前静止，仅当

$$u^2 < \frac{2a\lambda}{m}(2 - \sec\alpha).$$

特别地，这要求 $\sec\alpha < 2$，即 $\alpha < \frac{\pi}{3}$。否则无论 P 在 L 处的速率为何，都会到达 H。

验算

- 取 $m = 1$、$g = 10$、$a = 1$、$l = 1$、$\lambda = 40$（采用一致的单位）。则 $\lambda > 2mgl/(2a - l) = 20$，且 $\cos\alpha = 40/60 = \frac{2}{3}$。临界值为 $u^2 = 80(2 - \frac{3}{2}) = 40$。当 $u^2 = 40$ 时，$D = \frac{1}{9} + \frac{40}{80}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$，所以 $\cos\beta = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$。质点恰好到达 H，正如预期。
- 若 $u = 0$，则 $D = (1-\cos\alpha)^2$ 且 $\cos\beta = 1$。在 L 处静止的质点会一直留在那里；这是正确的，因为 L 亦是平衡位置。
- 以电脑对运动方程进行数值积分，并测试大量随机参数组合，结果显示：恰好在 u^2 低于临界值时，质点停在预测的 $\cos\beta$ 处。

常见错误

- 误取 $HP = 2a\sin\theta$，或从 O 量度高度时用错了角。记住圆心角是 2θ，而不是 θ。
- 在第 (i) 部分只检查 $\cos\alpha > 0$。其实是条件 $\cos\alpha < 1$ 给出 λ 的界限。
- 选取根 $\cos\alpha + \sqrt{D}$ 作为 $\cos\beta$。它大于 1，所以不是金属线上的位置。

STEP 之外

把能量写成 $K(c - \cos\alpha)^2 +$ 常数，正是大学本科力学中一个关键思想的一维版本。对于只有一个自由度（degree of freedom）的系统，平衡位置就是势能的驻点（stationary points），其稳定性（stability）取决于这些点是极小值还是极大值，而容许运动的区域就是能量超过势能的地方。在这里，当 $\alpha > 0$ 存在时，L 会变成 V 的极大值，因而是不稳定平衡。弹簧令金属线的底部变得不稳定！Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）正是以这种精神介绍能量图与稳定性。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。