详细解答

STEP II 2020，第 1 题

纯数学 · 代换积分法

STEP II 2020，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

关键思路

每个被积函数（integrand）都是两个线性因子的幂的乘积，而且指数之和为 -2。对于这类被积函数，合适的代换（substitution）是两个线性因子的比（ratio）（或其平方根）：它能一次过吸收两个括号，剩下的只是一个简单的幂或标准的反正切（arctangent）。第 (i) 部分利用题目给出的代换展示这个过程，第 (ii) 部分要求你仿效这个技巧，而第 (iii) 部分则要求你自行发现它。

解答

第 (i) 部分

设 $x = \dfrac{1}{1-u}$，则有

$$x - 1 = \frac{1-(1-u)}{1-u} = \frac{u}{1-u}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{(1-u)^2}.$$

当 u 取遍 $(0,1)$ 时，x 取遍 $(1,\infty)$，且 $u = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$。由于 $0 < u < 1$，所有根号内的量都是正数，因此

$$x^{3/2}(x-1)^{1/2} = \frac{1}{(1-u)^{3/2}} \cdot \frac{u^{1/2}}{(1-u)^{1/2}} = \frac{u^{1/2}}{(1-u)^2}.$$

这时 $(1-u)^2$ 的因子恰好与 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ 互相抵消：

$$\int \frac{1}{x^{3/2}(x-1)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-u)^2}{u^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u = \int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u$$
$$= 2u^{1/2} + c = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + c.$$

第 (ii) 部分

在第 (i) 部分中，$u = \frac{x-1}{x}$ 正是两个线性因子之比。这里我们仿效这个想法，取

$$u = \frac{x-2}{x+1}, \qquad \text{等价地} \qquad x+1 = \frac{3}{1-u}, \quad x-2 = \frac{3u}{1-u},$$

因为 $x-2 = (x+1)-3$。当 $x > 2$ 时，得 $0 < u < 1$，且 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \dfrac{3}{(1-u)^2}$。于是

$$(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2} = \frac{3^{3/2}u^{3/2}}{(1-u)^{3/2}} \cdot \frac{3^{1/2}}{(1-u)^{1/2}} = \frac{9u^{3/2}}{(1-u)^2},$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(1-u)^2}{9u^{3/2}} \cdot \frac{3}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int u^{-3/2}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{2}{3}u^{-1/2} + c = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} + c.\end{aligned}$$

求导可以验证这个结果。设 $f = \frac{x+1}{x-2}$，则 $f' = -\frac{3}{(x-2)^2}$，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\tfrac{2}{3}\sqrt{f}\right) = -\frac{f'}{3\sqrt{f}} = \frac{1}{(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{1}{(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2}}.$$

第 (iii) 部分

这次题目没有给出代换。由于多了一个因子 $x-1$，被积函数并不是某个比的纯幂，但两个平方根与之前属同一类型。

> **想一想** 前两个答案都是线性因子之比的平方根。如果把这样一个平方根取作新变量，会发生甚么事?

试设

$$t = \sqrt{\frac{x-2}{3x-2}}.$$

当 x 由 2 增加至 ∞ 时，$\frac{x-2}{3x-2} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3(3x-2)}$ 由 0 递增并趋向 $\frac{1}{3}$，所以 t 由 0 递增至 $\frac{1}{\sqrt{3}}$，并且始终有 $0 \le t < \frac{1}{\sqrt{3}}$。由 $t^2(3x-2) = x-2$ 解出 x，得

$$x = \frac{2(1-t^2)}{1-3t^2},$$

其中 $1-3t^2 > 0$。由此，

$$x-1 = \frac{1+t^2}{1-3t^2}, \qquad 3x-2 = \frac{4}{1-3t^2},$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2[-2t(1-3t^2)+6t(1-t^2)]}{(1-3t^2)^2} = \frac{8t}{(1-3t^2)^2}.$$

由于 $\sqrt{x-2} = t\sqrt{3x-2}$，两个平方根可以整齐地合并：

$$(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2} = t\,(3x-2) = \frac{4t}{1-3t^2}.$$

所以整个分母是

$$(x-1)(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2} = \frac{4t(1+t^2)}{(1-3t^2)^2},$$

而一切再次与 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 互相抵消：

$$\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2}} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{(1-3t^2)^2}{4t(1+t^2)} \cdot \frac{8t}{(1-3t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\Big[\arctan t\Big]_0^{1/\sqrt{3}} = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$$

此即所求。

原积分在两端都是反常积分（improper integral），但它是收敛（converge）的。在 $x=2$ 附近，被积函数的表现类似 $\frac{1}{2}(x-2)^{-1/2}$；当 x 很大时，则类似 $\frac{1}{\sqrt{3}}x^{-2}$。代换把它变成一个连续函数在有限区间上的普通积分，因此无需另外取极限。

验算

- 对 (i) 和 (ii) 的答案求导。就 (i) 而言，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2\sqrt{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1/2} = x^{-3/2}(x-1)^{-1/2}$。
- 正负号：(ii) 的被积函数是正数，所以原函数（antiderivative）必须递增。事实的确如此，因为当 x 增大时，$\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ 递减并趋向 1。
- 数值验算：用辛普森法则（Simpson's rule）计算 (i) 中的 $\int_{1.5}^{3}$ 和 (ii) 中的 $\int_{2.5}^{4}$，结果与原函数给出的数值一致（0.47829… 和 0.70974…）。把 (iii) 的积分在 $x=3$ 处分拆后直接计算，得 1.0471975… $= \frac{\pi}{3}$。

常见错误

- 在 (iii) 中忘记更改积分上下限。上限是 $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$，而不是 ∞；$\frac{\pi}{6}$ 正是由此而来。
- 把 (i) 或 (ii) 的答案写成 u 的式子，而没有按题目要求换回 x。
- 处理 $1-u$ 的半次幂时出错。要小心合并：$(1-u)^{-3/2}(1-u)^{-1/2} = (1-u)^{-2}$。

STEP 之外

由 $\sqrt{(x-a)(x-b)}$ 构成的被积函数，总可以用类似我们的代换化为有理函数。这属于积分 x 与 $\sqrt{\text{二次式}}$ 的有理函数（rational function）的经典理论（欧拉（Euler）代换）。第 (iii) 部分同时也是一个在无限区间上的反常积分，而用极限来为这类积分赋予意义，是大学一年级分析（analysis）的标准课题。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对反常积分有细致的处理，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学问题》）则收录了更多这类 STEP 积分题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。