详细解答

STEP III 2019，第 9 题

力学 • 移动半球上的质点

STEP III 2019，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

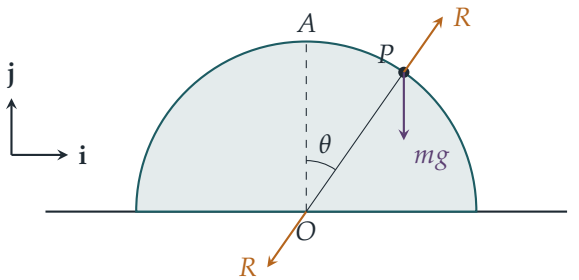
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

两个接触面都是光滑（smooth）的，所以作用于整个系统（质点加半球）的外力都没有水平分量：水平动量守恒（conservation of horizontal momentum），这把半球的速率与质点的角速率联系起来。由于除重力外没有其他力做功，能量亦守恒（conservation of energy），这两条定律合起来便得出第 (ii) 部分。至于质点何时离开表面，最干净的判断准则是法向反作用力（normal reaction）变为零；题目建议的向量经过特意挑选，使我们取分量时，未知的 $\ddot{\theta}$ 会消失。

解答

模型：P 是一个质点，半球是刚体（rigid body），所有接触面都光滑。两者接触期间，P 与半球之间唯一的力是沿 OP 方向的法向反作用力 R，而桌面则对半球施加铅垂方向的推力。



作用于半球的反作用力（为清晰起见画在 O 处）与作用于 P 的反作用力大小相等、方向相反。

第 (i) 部分

在时间 t，球心 O 已移至 $-s\,\mathbf{i}$，而 P 与它的距离为 a，方向为 $\sin\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j}$。因此

$$\mathbf{r}=(a\sin\theta-s)\,\mathbf{i}+a\cos\theta\,\mathbf{j},$$

对 t 求导（对 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 使用连锁法则（chain rule)），得

$$\dot{\mathbf{r}}=(a\dot\theta\cos\theta-\dot s)\,\mathbf{i}-a\dot\theta\sin\theta\,\mathbf{j},$$

得证。

作用于系统的外力是两个重量和桌面的反作用力，全部都是铅垂方向的，所以总水平动量一直保持其初始值，即零（我们假设微小的初始位移所带来的速率可以忽略)。半球的速度是 $-\dot s\,\mathbf{i}$，所以

$$m(a\dot\theta\cos\theta-\dot s)-M\dot s=0\quad\Longrightarrow\quad \dot s=\frac{m}{m+M}\,a\dot\theta\cos\theta=(1-k)\,a\dot\theta\cos\theta,$$

因为 $1-k=\dfrac{m}{m+M}$。代入 $\dot{\mathbf{r}}$ 的 $\mathbf{i}$ 分量，

$$a\dot\theta\cos\theta-(1-k)a\dot\theta\cos\theta=k\,a\dot\theta\cos\theta,\qquad\text{所以}\qquad \dot{\mathbf{r}}=a\dot\theta\,(k\cos\theta\,\mathbf{i}-\sin\theta\,\mathbf{j}).$$

第 (ii) 部分

各反作用力所做的净功为零：桌面的反作用力与半球的运动方向垂直；而 P 与半球之间的一对力 $\pm R$ 所做的总功为零，因为 P 一直留在表面上（两者的相对速度沿着表面，与 R 垂直)。所以动能加势能守恒。P 已下降了 $a(1-\cos\theta)$，而起初所有物体（实际上）都是静止的，所以

$$\tfrac12 ma^2\dot\theta^2(k^2\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\tfrac12 M\dot s^2=mga(1-\cos\theta).$$

利用第 (i) 部分，$M\dot s^2=M(1-k)^2a^2\dot\theta^2\cos^2\theta$。于是 $a^2\dot\theta^2\cos^2\theta$ 的总系数为

$$mk^2+M(1-k)^2=\frac{mM^2+Mm^2}{(m+M)^2}=\frac{mM}{m+M}=mk.$$

因此 $\tfrac12 ma^2\dot\theta^2(k\cos^2\theta+\sin^2\theta)=mga(1-\cos\theta)$，两边除以 $\tfrac12 ma$，

$$a\dot\theta^2(k\cos^2\theta+\sin^2\theta)=2g(1-\cos\theta).$$

第 (iii) 部分

设 $\mathbf{u}=\sin\theta\,\mathbf{i}+k\cos\theta\,\mathbf{j}$。对第 (i) 部分的最后结果求导，

$$\ddot{\mathbf{r}}=a\ddot\theta\,(k\cos\theta\,\mathbf{i}-\sin\theta\,\mathbf{j})-a\dot\theta^2\,(k\sin\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j}).$$

第一个括号与 $\mathbf{u}$ 垂直，因为 $k\cos\theta\sin\theta-\sin\theta\,k\cos\theta=0$。所以

$$\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{u}=-a\dot\theta^2(k\sin^2\theta+k\cos^2\theta)=-k\,a\dot\theta^2.$$

想一想 为甚么这个向量特别有用?

它消去了我们一无所知的 $\ddot{\theta}$ 项，只剩下第 (ii) 部分已给出的 $\dot{\theta}^2$。现在与 P 的牛顿第二定律（Newton's second law）作比较：

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\,\mathbf{j} + R(\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}).$$

取沿 $\mathbf{u}$ 的分量，并与上面的结果比较，

$$-mk\,a\dot{\theta}^2 = -mgk\cos\theta + R(\sin^2\theta + k\cos^2\theta),$$

所以

$$R(\sin^2\theta + k\cos^2\theta) = mk(g\cos\theta - a\dot{\theta}^2).$$

当 R 降至零时，质点便离开半球。由于 $k > 0$，在 $\theta = \alpha$ 时得

$$a\dot{\theta}^2 = g\cos\alpha.$$

三次方程。 设 $c = \cos\alpha$，并在 $\theta = \alpha$ 时使用第 (ii) 部分，配合 $\sin^2\alpha = 1 - c^2$：

$$gc(kc^2 + 1 - c^2) = 2g(1 - c) \quad\Longrightarrow\quad (1-k)\,c^3 - 3c + 2 = 0.$$

设 $f(x) = (1-k)x^3 - 3x + 2$，其中 $0 < 1 - k < 1$，因为 m 和 M 都是正数。

- 对于 $-1 \le x \le 1$，$f'(x) = 3\big((1-k)x^2 - 1\big) < 0$，所以 f 在该区间严格递减（strictly decreasing），在 $[-1, 1]$ 内最多只有一个根。
- $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}(1-k) - 2 + 2 = \frac{8}{27}(1-k) > 0$，而 $f(1) = -k < 0$。

所以 $[-1, 1]$ 内唯一的根严格位于 $\frac{2}{3}$ 与 1 之间。由于 $\cos\alpha$ 必须位于 $[-1, 1]$ 内，它就是这个根，因此

$$\cos\alpha > \tfrac{2}{3}.$$

（这与 R 的公式一致：代入第 (ii) 部分可见 $g\cos\theta - a\dot{\theta}^2$ 与 $-f(\cos\theta)$ 同号，它在 $\theta = 0$ 时为正，并在这个根处首次变为零，所以 P 确实一直保持接触，直至那一刻。）

验算

- 若 $M \to \infty$，则 $k \to 1$，半球保持不动，三次方程变为 $-3c + 2 = 0$：即质点从固定球面滑落时大家熟悉的 $\cos\alpha = \frac{2}{3}$。半球会移动，令质点较早离开，即在较大的 $\cos\alpha$ 处离开。
- 当两者质量相等时，$1 - k = \frac{1}{2}$，三次方程 $c^3 - 6c + 4 = 0$ 可因式分解为 $(c-2)(c^2 + 2c - 2) = 0$，得 $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$，大于 $\frac{2}{3}$。

- 用电脑对完整运动作逐步数值模拟（numerical simulation），测试了多个质量比，过程中证实了第 (i) 和第 (ii) 部分的关系式，并发现当 $m = M$ 时反作用力在 $\cos\theta \approx 0.732$ 处变为零，与三次方程吻合。

常见错误

- 未经论证便使用固定球面的条件 $a\dot{\theta}^2 = g\cos\theta$：这里半球有加速度，所以质点的加速度并不只是绕固定点的圆周运动。这条件在离开的一刻恰好成立，只是因为 $R = 0$ 意味着半球在那一刻没有水平加速度。
- 在能量方程中漏掉半球的动能 $\frac{1}{2}M\dot{s}^2$。
- 只证明了有一个根位于 $\frac{2}{3}$ 与 1 之间，却没有排除 $[-1, 1]$ 内存在另一个根。

STEP 之外

这是一个具两个自由度（degrees of freedom）的系统，拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）可以有系统地处理它：用 θ 和 s 写出动能和势能，由于 s 不出现在拉格朗日量（Lagrangian）中，水平动量守恒便自动出现（这是一个“可忽略”坐标（ignorable coordinate），由诺特（Noether）定理与一种对称性联系起来）。像 R 这样的约束力（constraint forces）则在之后才求出，正如我们在这里所做的一样。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）是先建立牛顿力学直觉的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。