详细解答

STEP III 2019，第 8 题

纯数学 · 向量与三维几何

STEP III 2019，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

关键思路

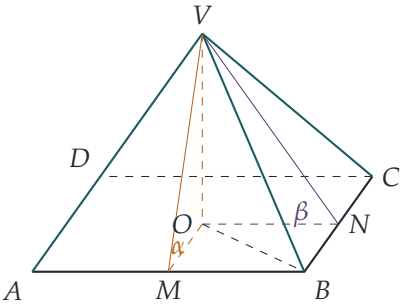
先为棱锥（pyramid）建立坐标。每个斜面都包含一条底边，而底边是水平的，因此该斜面的法向量（normal）必与这条底边垂直。这就迫使法向量落在一个铅垂平面内，而在这个平面上，斜面与底面之间的夹角可以直接读出。之后，两个斜面之间的夹角可由两条法向量的点积（dot product）求得，其余部分就只是细心的三角代数运算，再加上一次算术－几何平均不等式（AM–GM）。

解答

设底面的中心为原点 O，$\mathbf{i}$ 沿 AB 方向，$\mathbf{j}$ 沿 BC 方向，$\mathbf{k}$ 向上。取

$$A=(-a,-b,0),\quad B=(a,-b,0),\quad C=(a,b,0),\quad D=(-a,b,0),\quad V=(0,0,h),$$

其中 $a,b,h>0$。



设 $M=(0,-b,0)$ 为 AB 的中点，$N=(a,0,0)$ 为 BC 的中点。由于 $VA=VB$，直线 VM 位于面 AVB 内并与 AB 垂直；底面上的 OM 亦与 AB 垂直。因此该斜面与底面之间的

夹角就是角 VMO，并且

$$\tan\alpha = \frac{h}{b}, \qquad \text{同样地} \qquad \tan\beta = \frac{h}{a}.$$

第 (i) 部分

面 AVB 包含方向 $\overrightarrow{AB} \parallel \mathbf{i}$ 及 $\overrightarrow{MV} = b\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}$。其一条法向量为

$$\mathbf{i} \times (b\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}) = -h\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k}.$$

除以其长度 $\sqrt{h^2 + b^2}$，并利用 $\tan\alpha = h/b$，便得单位法向量（unit normal）

$$\mathbf{n}_1 = -\sin\alpha\,\mathbf{j} + \cos\alpha\,\mathbf{k}.$$

它的 $\mathbf{j}$ 分量为负，所以它指向棱锥外面（面 AVB 位于 $y < 0$ 的一侧）。

用完全相同的方法，面 BVC 包含 $\mathbf{j}$ 及 $\overrightarrow{NV} = -a\,\mathbf{i} + h\,\mathbf{k}$，其向外的单位法向量为

$$\mathbf{n}_2 = \sin\beta\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{k}.$$

因此

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos\alpha\cos\beta.$$

> **想一想** 两条法向量之间的夹角，究竟是两个面之间的夹角，还是它的补角（supplement）？

考虑一个与公共棱 VB 垂直的截面。在截面上，两个面显示为两条直线，相交成内角 $\pi - \theta$，而每条向外法向量都与所属直线垂直，并指离立体。把其中一个面经内角转到另一个面上，向外法向量亦会转过同样的角度；但在截面上，两条法向量都指向外面，所以它们之间的夹角是 $\pi - (\pi - \theta) = \theta$。（想像一个立方体：两面成 $\frac{\pi}{2}$，法向量亦成 $\frac{\pi}{2}$；把棱锥压扁，两面的夹角趋向 π，而法向量的夹角则趋向 0。）因此

$$\cos\theta = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos\alpha\cos\beta,$$

此即所求。由于 $0 < \cos\alpha\cos\beta < 1$，$\theta$ 是锐角，这与两个面相交成钝角的情况一致。

第 (ii) 部分

从 V 所作垂线的垂足是 O，所以 BV 与底面之间的夹角是角 VBO，且

$$\cot\phi = \frac{OB}{h} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{h}.$$

因此

$$\cot^2\phi = \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} = \cot^2\beta + \cot^2\alpha,$$

这里用了 $\cot\beta = a/h$ 及 $\cot\alpha = b/h$。这就是第一个结果。

至于第二个结果，记 $p = \cos^2\alpha$，$q = \cos^2\beta$，则由第 (i) 部分得 $\cos^2\theta = pq$。于是

$$\cot^2\phi = \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} = \frac{p+q-2pq}{(1-p)(1-q)}.$$

由于 $\cos^2\phi = \dfrac{\cot^2\phi}{1+\cot^2\phi}$，我们需要

$$1+\cot^2\phi = \frac{(1-p)(1-q)+p+q-2pq}{(1-p)(1-q)} = \frac{1-pq}{(1-p)(1-q)},$$

两者相除，得

$$\cos^2\phi = \frac{p+q-2pq}{1-pq} = \frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}.$$

（由于 $\cos\theta < 1$，分母为正。）

由于 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 均为正，根据算术—几何平均不等式，

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta \;\geq\; 2\cos\alpha\cos\beta = 2\cos\theta,$$

又因 $1-\cos^2\theta > 0$，

$$\cos^2\phi \;\geq\; \frac{2\cos\theta-2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}.$$

想一想 这个下界怎样告诉我们有关 ϕ 和 θ 的信息?

把它化简，再与 $\cos^2\theta$ 比较。约去正因子 $1-\cos\theta$，

$$\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} = \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

记 $c = \cos\theta \in (0,1)$，

$$\frac{2c}{1+c} - c^2 = \frac{c\,(2-c-c^2)}{1+c} = \frac{c\,(1-c)(2+c)}{1+c} > 0.$$

所以 $\cos^2\phi \geq \dfrac{2c}{1+c} > \cos^2\theta$。$\phi$ 和 θ 均位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内，而余弦在此区间内为正且递减，所以由 $\cos\phi > \cos\theta$ 得 $\phi < \theta$。

验算

- 正方形底面，且 h 等于边长的一半（$a = b = h$）：$\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$，所以 $\cos\theta = \frac{1}{2}$，$\theta = 60°$。直接计算，$\cot\phi = \sqrt{2}$，所以 $\cot^2\phi = 2 = 1+1$，且 $\phi \approx 35.26° < 60°$。此外 $\cos^2\phi = \frac{2}{3}$，与 $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2})/(1-\frac{1}{4}) = \frac{2}{3}$ 相符。
- 以电脑对 10^5 个随机棱锥进行验算，通过经 VB 的截面直接量度两面之间的夹角，结果与 $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$ 及 ϕ 的两条公式均吻合，而且每次都得到 $\phi < \theta$。

常见错误

- 一个面取向内法向量，另一个面却取向外法向量：这样点积的正负号便会出错，得出的是 $\cos(\pi - \theta)$。
- 沿棱 VA 而非沿斜高（slant height）VM 量度 α；两个平面之间的夹角必须在与其交线垂直的方向上量度。
- 只推到 $\cos^2\phi \geq \dfrac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}$ 便停下，而没有证明这个值大于 $\cos^2\theta$。

STEP 之外

两个平面之间的夹角等于它们法向量之间的夹角（至多相差一个补角），这正是多变量微积分（multivariable calculus）和微分几何（differential geometry）中用法向量描述曲面的起点。恒等式 $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$ 其实亦是球面毕氏定理（spherical Pythagoras theorem）的变相形式：三条法向量 $\mathbf{k}$、$\mathbf{n}_1$、$\mathbf{n}_2$ 构成一个球面直角三角形。若想加深对点积和叉积（cross product）的体会，Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）是个不错的起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。